

DLR-IB-AT-KP-2017-158

**Implementierung und Analyse von
Methoden zur Generierung
synthetischer Turbulenz**

Masterarbeit

Marcel Matha



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Kurzfassung

Um für zukünftige Strömungssimulationen turbulente Zuströmbedingungen kreieren zu können, wird im Rahmen dieser Masterarbeit das Konzept der synthetischen Turbulenzerzeugung nach Shur et al. [36] im Kontext der Large Eddy Simulation untersucht. Dabei werden die synthetisch erzeugten turbulenten Fluktuationen über eine Randbedingungsformulierung oder eine flexible Quelltermformulierung in das Strömungsgebiet eingebracht und der sich einstellende Strömungscharakter anhand von geeigneten generischen Testfällen validiert und verifiziert.

Dazu wird zunächst eine räumlich zerfallende isotrope Turbulenz betrachtet, um anschließend das anisotrope Verhalten und vor allem die charakteristische Entwicklungslänge des STG unter Betrachtung einer Kanalströmung zu analysieren.

Die erzielten Simulationsergebnisse, die mittels des CFD-Lösers TRACE des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt erzielt wurden, sind vielversprechend, wenngleich es noch weiterführender Untersuchungen hinsichtlich eines breiteren Anwendungsbereichs, der über die generischen Testfälle hinausreicht, bedarf.

Abstract

The task of this Master's thesis is to analyse the concept of synthetic turbulence generation by Shur et al. [36] with respect to Large Eddy Simulations, in order to create turbulent inflow conditions for future flow simulations.

The synthetically generated turbulent fluctuations can be introduced into the flow region by using a boundary condition or a flexible source term formulation. The functionality of these different applications is validated and verified by suitable generic test cases.

The correct representation of isotropy is investigated while looking at spatially decaying turbulence. Furthermore the anisotropic behaviour and the characteristic development length of the STG are analysed in a channel flow application.

The simulation results, based on the CFD-solver TRACE, which was developed by the German Aerospace Center, are promising, although there are more investigations to come, regarding a wider range of application, which exceeds the generic test cases.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
Nomenklatur	xiii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	2
2 Grundlagen	5
2.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik	5
2.2 Turbulenz	7
2.3 Turbulenzmodellierung	10
2.3.1 Direkte Numerische Simulation	10
2.3.2 Statistische Turbulenzmodellierung	10
2.3.3 Large Eddy Simulation	13
2.3.3.1 Filterung	15
2.3.3.2 Gefilterte Gleichungen	17
2.3.3.3 Feinstrukturmodelle	19
2.3.3.3.1 Smagorinsky-Modell	20
2.3.3.3.2 WALE-Modell	22
3 Synthetischer Turbulenzgenerator	25
3.1 Überblick über verschiedene STG-Ansätze	26
3.1.1 POD-Methoden	26
3.1.2 SEM-Methoden	26

3.1.3	Digitales Filterkonzept	27
3.1.4	Fourier-Techniken	27
3.2	Konzept des STG basierend auf der Fourier-Technik	28
4	Numerisches Setup	33
4.1	Löser	33
4.2	Randbedingungen für den STG	34
4.3	Methoden zum Einbringen der synthetischen Turbulenz	35
4.3.1	Eintrittsrandformulierung	35
4.3.2	Quelltermformulierung	35
5	Simulation	39
5.1	Räumlich zerfallende Turbulenz	39
5.1.1	Beschreibung	39
5.1.2	Setup	40
5.1.3	Auswertung und Ergebnisse	43
5.2	Kanalströmung	60
5.2.1	Beschreibung	60
5.2.2	Allgemeines Setup	60
5.2.3	Periodischer Kanal	62
5.2.3.1	Setup	62
5.2.3.2	Auswertung und Ergebnisse	64
5.2.4	Endlicher Kanal	68
5.2.4.1	Setup	68
5.2.4.2	Auswertung und Ergebnisse	69
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	83
A	Numerisches Setup der räumlich zerfallenden Turbulenz	87
B	Numerisches Setup der periodischen Kanalrechnung	89

C Numerisches Setup der endlichen Kanalrechnung	91
--	-----------

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2.1:	Energie über Wellenzahl in einem doppelt logarithmischen Diagramm	8
Abb. 2.2:	Zeitlicher Verlauf einer hydrodynamischen Feldgröße	11
Abb. 2.3:	Vergleich der Turbulenzmodellierungen hinsichtlich Modellierungsgrad und Rechenaufwand	14
Abb. 2.4:	Top-Hat-Filter für $\Delta = 1$	16
Abb. 2.5:	Gefiltertes Spektrum angelehnt an [41]	17
Abb. 3.1:	Modifiziertes Energiespektrum für den STG nach Shur et al. [36] . . .	30
Abb. 4.1:	Prinzipskizze der Wirkweise der Quelltermformulierung	37
Abb. 5.1:	Hexaedernetz des betrachteten Raumsegments in der Grundkonfiguration mit $n = 1$, Abmessungen in Meter	43
Abb. 5.2:	Wirbelstrukturen im Raumsegment bei der Eintrittsformulierung . . .	44
Abb. 5.3:	Räumliche Entwicklung der Wirbelstrukturen in der XZ -Ebene	45
Abb. 5.4:	Turbulenzgrad bezogen auf den Vorgabewert über der Kanallänge . .	46
Abb. 5.5:	Exponentialfunktion G in Abhängigkeit der Lauflänge	47
Abb. 5.6:	Reynoldsspannungen bezogen auf die Vorgabewerte über der Lauflänge bei der Eintrittsformulierung	48
Abb. 5.7:	Reynoldsspannungen bezogen auf die Vorgabewerte über der Lauflänge bei der Quelltermformulierung	49
Abb. 5.8:	Anisotropie der Eintrittsformulierung	52
Abb. 5.9:	Anisotropie der Quelltermformulierung	53
Abb. 5.10:	Vergleich der Ergebnisse nach unterschiedlichen Zeitschrittzahlen: Turbulenzgrad bezogen auf den Vorgabewert über der Lauflänge Information zur Legende: ET $\hat{=}$ Eintrittsrandformulierung QT $\hat{=}$ Quelltermformulierung 50k $\hat{=}$ 50 000 Zeitschritte 500k $\hat{=}$ 500 000 Zeitschritte Mittel $\hat{=}$ räumliches Mittel über die YZ -Ebene	54

Abb. 5.11: Autokorrelationen der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Eintrittsformulierung	56
Abb. 5.12: Autokorrelationen der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Quelltermformulierung	57
Abb. 5.13: Energiespektren der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Eintrittsformulierung	58
Abb. 5.14: Energiespektren der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Quelltermformulierung	59
Abb. 5.15: Hexaedernetz der Rechengebiete mit Abmessungen in Meter	61
Abb. 5.16: Mittleres Geschwindigkeitsprofil der periodischen Kanalrechnung	65
Abb. 5.17: Quadratisches Mittel der Normalspannungen $\widetilde{u''_x^+}, \widetilde{u''_y^+}, \widetilde{u''_z^+}$ und Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y^+}$ in wandnormaler Richtung bei der periodischen Rechnung	65
Abb. 5.18: Position der Auswertungspunkte dargestellt im Hinblick auf die Verteilung der zeitlich gemittelten Reynoldsspannungen bei $x/L_x = 0.5$	67
Abb. 5.19: Resultierende integrale Größen in wandnormaler Richtung aus periodischer Rechnung	68
Abb. 5.20: Räumliche Entwicklung der Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}$	71
Abb. 5.21: Räumliche Entwicklung der Wirbelstrukturen in der XY-Ebene	71
Abb. 5.22: Auswertung der Entwicklungslänge der Eintrittsformulierung	72
Abb. 5.23: Entwicklung der Reynoldsspannungen in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei der Eintrittsformulierung	73
Abb. 5.24: Vergleich der Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei den Quelltermformulierungen	74
Abb. 5.25: Vergleich der Reibungsbeiwerte über Lauflänge der verschiedenen Methoden	75
Abb. 5.26: Entwicklung der Reynoldsspannungen in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei der Quelltermformulierung V1	76
Abb. 5.27: Entwicklung der Reynoldsspannungen in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei der Quelltermformulierung V2	78
Abb. 5.28: Energiespektren der Kanalströmung bei der Eintrittsformulierung	79
Abb. 5.29: Energiespektren der Kanalströmung bei der Quelltermformulierung V1	80

Tabellenverzeichnis

Tab. 2.1:	Unterschiede zwischen großen und kleinen Skalen unter idealisierten Bedingungen [35]	14
Tab. 2.2:	Feinstrukturterme in der Favre-gefilterten Energiegleichung nach Vreman [40]	20
Tab. 5.1:	Vorgabeparamater bei der räumlich zerfallenden Turbulenz	40
Tab. 5.2:	Abmessungen und Diskretisierung des Raumsegments	41
Tab. 5.3:	Eingangsgrößen für die räumlich zerfallende Turbulenz	42
Tab. 5.4:	Auswertung der maximalen Differenzen von $\Delta \widetilde{u''_y u''_y}$	50
Tab. 5.5:	Auswertung der maximalen Differenzen von $\Delta \widetilde{u''_z u''_z}$	50
Tab. 5.6:	Diskretisierungssetup der Kanalströmung	62
Tab. 5.7:	Vorgabeparameter für die Auswertung der Kanalströmung	63

Nomenklatur

Lateinische Symbole

a	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
a_{ij}	[−]	Anisotropietensor
A	[m/s]	Tensor für STG
B_{ii}	[m ² /s ²]	Korrelation
c_f	[−]	Reibungsbeiwert
c_p	[J/(kg · K)]	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_v	[J/(kg · K)]	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
C	[K]	Sutherland-Konstante
C_l	[−]	empirische Konstante für STG
C_s	[−]	Modellkonstante Smagorinsky-Modell
C_w	[−]	Modellkonstante WALE-Modell
C_μ	[−]	Modellkonstante k - ω -Modell
d	[m]	Abstand
d_w	[m]	Wandabstand für STG
d^n	[−]	zufallsbedingter Einheitsvektor für STG
e	[J/kg]	spezifische innere Energie
E	[J]	Energie
E_{spez}	[J/kg]	spezifische Gesamtenergie
\tilde{E}	[Pa]	berechenbare Energie in LES-Gleichungen
ETT	[−]	Eddy Turnover Time

Nomenklatur

f	[1/s]	Frequenz
f	[−]	Dämpfungsfunktion für STG
F	[1/m]	Filterkern für LES
g_{ij}	[1/s]	Geschwindigkeitsgradiententensor
G	[−]	Exponentialfunktion für Quelltermformulierung
h	[J/kg]	spezifische Enthalpie
h	[m]	Gitterschrittweite
k	[1/m]	Wellenzahl
k	[J/kg]	turbulente kinetische Energie
k^n	[1/m]	Amplitude des Wellenzahlvektors für STG
\mathbf{k}^n	[1/m]	Wellenzahlvektor für STG
l	[m]	Länge
L	[m]	Länge
Ma	[−]	Machzahl
n	[−]	Laufindex
N	[−]	Gitterzellenanzahl
N	[−]	Modenanzahl für STG
N_t	[−]	Zeitschrittanzahl
p	[Pa]	Druck
q	[kg/s ³]	spezifischer Wärmestrom
q^n	[−]	normierte Amplitude für STG
\mathbf{r}	[m]	Ortsvektor
\mathbf{r}'	[m]	Scheinpositionsvektor für STG
R	[J/(kg · K)]	Spezifische Gaskonstante
Re	[−]	Reynoldszahl
Re_τ	[−]	Reynoldszahl basierend auf Schubspannungsgeschwindigkeit
s_{ij}	[1/s]	Deformationstensor
s_{ij}^d	[1/s ²]	spezieller Deformationstensor für WALE-Modell

S	$[\text{N}/\text{m}^3]$	Volumenquellterm
t	$[\text{s}]$	Zeit
T	$[\text{K}]$	Temperatur
T	$[\text{s}]$	Zeit
Tu	$[-]$	Turbulenzgrad
u	$[\text{m}/\text{s}]$	Geschwindigkeit
\mathbf{u}	$[\text{m}/\text{s}]$	Geschwindigkeitsvektor
u_τ	$[\text{m}/\text{s}]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
\tilde{u}_x^+	$[-]$	dimensionslose Geschwindigkeit
$\tilde{u}_i''^+$	$[-]$	quadratisches Mittel der Reynoldsspannungen
$\widetilde{u_i'' u_j''}^+$	$[-]$	dimensionslose Reynoldsspannungen
\mathbf{v}''	$[-]$	Fluktuationsvektor für STG
V	$[\text{m}^3]$	Volumen
x, y, z	$[\text{m}]$	kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	$[\text{m}]$	Ortsvektor
y^+	$[-]$	dimensionsloser Wandabstand

Griechische Symbole

α	$[-]$	empirische Konstante (auch für STG)
α_i	$[\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^3)]$	Feinstrukturterme der Energiegleichung ($i = \{1,2,3,4,5,6\}$)
β	$[-]$	empirische Konstante für STG
γ	$[-]$	Isentropenexponent
Γ	$[\text{N}]$	konvektiven und diffusiven Flüsse
δ	$[\text{m}]$	halbe Kanalhöhe (Wandrichtung)
δ_{ij}	$[-]$	Kronecker-Delta
Δ	$[-]$	Differenz
Δ	$[\text{m}]$	Filterweite
ϵ	$[\text{m}^2/\text{s}^3]$	turbulente Dissipationsrate

Nomenklatur

η	[Pa · s]	dynamische Viskosität
ι_{ij}	[m ² /s ²]	Feinstrukturspannungstensor
κ	[−]	Parameter für MUSCL-Verfahren
λ	[W/(m · K)]	Wärmeleitfähigkeit
λ_2	[−]	Eigenwert zur Wirbelidentifikation
ν	[m ² /s]	kinematische Viskosität
ν_t	[m ² /s]	Wirbelviskosität
ξ	[m]	Ortsvektor
π	[−]	Kreiszahl
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ_{ij}	[Pa]	Spannungstensor
σ^n	[−]	Einheitsvektor für STG
τ	[s]	Zeitdifferenz
τ_{ij}	[m ² /s ²]	Reynoldsspannungstensor
τ_w	[Pa]	Wandschubspannung
ϕ	[−]	Blending-Faktor
ϕ^n	[−]	Phase für STG
ψ		allgemeine hydrodynamische Variable
ω	[1/s]	Kreisfrequenz
ω	[1/s]	Wirbelstärke
ω	[1/s]	spezifische turbulente Dissipationsrate

Indizes

*	geändertes Strömungsfeld durch Quellterm
0	spurfrei (Tensor)
0	Referenzwert
<i>a</i>	anisotrop
<i>cut</i>	abgeschnitten (durch Filterfunktion)
<i>CFD</i>	Größe für Strömungslöser
<i>e</i>	Ort des Energiemaximums für STG

FS	Feinstrukturanteil
$makro$	makroskopisch
max	maximal
min	minimal
mod	modelliert
$norm$	normiert
QT	Quellterm
SM	Smagorinsky-Modell
STG	Synthetischer Turbulenzgenerator
syn	synthetisch
T	turbulente integrale Größe
$WALE$	WALE-Modell
x	in x-Richtung
y	in y-Richtung
z	in z-Richtung
η	Kolmogorov-Skala

Diakritische Zeichen

Anmerkung: \square wird hierbei als Platzhalter für Variablen genutzt.

$\overline{\square}$	zeitlicher Mittelwert
\square'	Schwankungsterm basierend auf der zeitlichen Mittelwertbildung
$\widetilde{\square}$	Favre-Mittelwert
\square''	Schwankungsterm basierend auf der Mittelwertbildung nach Favre
$\langle \square \rangle$	gefilterte Größe gemäß LES-Ansatz
\square'''	Schwankungsterm basierend auf der Filterung
$\widetilde{\langle \square \rangle}$	Favre-gefilterte Größe
\square''''	Schwankungsterm basierend der Favre-Filterung
$\check{\square}$	neu gebildete Größen basierend auf Favre-Filterung

Abkürzungen

ACARE	Advisory Council for Aeronautics Research in Europe
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
DNS	Direkte Numerische Simulation
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
ET	Eintrittsrandformulierung
LES	Large Eddy Simulation
MUSCL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
POD	Principal Orthogonal Decomposition
PSD	Power Spectral Density
QT	Quelltermformulierung
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
SEM	Synthetic Eddy Methods
STG	Synthetischer Turbulenzgenerator
TRACE	Turbomachinery Research Aerodynamics Computational Environment
WALE	Wall-Adaptive Local Eddy Viscosity

1 Einleitung

1.1 Motivation

Turbulenz ist ein allgegenwärtiges, universelles aber auch grundlegendes Phänomen unserer Welt. Bei der Entstehung von Planeten sowie ebenso bei alltäglichen Dingen, wie dem Vermischen von Milch in Kaffee, ist Turbulenz beteiligt. Turbulente Strukturen bestimmen das Wettergeschehen unserer Atmosphäre, aber ebenso den Strömungscharakter des Wasserstrahls im Badezimmer. Selbst das vertrauteste Geräusch unseres Lebens, der Doppelton eines Herzschlags, ist der akustische Fußabdruck von turbulenten Strukturen [42].

Außerdem sind nahezu alle technisch relevanten Strömungen turbulent, weshalb deren korrekte Beschreibung und Vorhersage für Ingenieure von großer Bedeutung ist. Aufgrund der hohen Anforderungen von ACARE (engl.: **A**dvisory **C**ouncil for **A**eronautics **R**esearch in **E**urope) an die Luftfahrtindustrie mit dem Ziel zukünftige Fluggeräte noch leiser, effizienter und ressourcen- bzw. umweltschonender auszulegen, spielen gerade die Entwicklung von Turbomaschinen und, einhergehend damit, das Verständnis von Turbulenz eine grundlegende Rolle [1].

Die Bewegung und das Verhalten eines viskosen Fluids sind unabhängig von dessen Strömungscharakter (laminar oder turbulent) durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschreibbar. Da die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieser Gleichungen nicht bewiesen ist, müssen die Navier-Stokes-Gleichungen in einer Näherungsform numerisch approximiert werden. Praktischerweise gewann die numerische Strömungsmechanik (engl.: CFD, **C**omputational **F**luid **D**ynamics) aufgrund der Steigerung der Rechenressourcen und des ungebrochenen Trends zur Verfügbarkeit von Hochleistungsrechnern vermehrt an Bedeutung, sodass die numerische Behandlung dieser partiellen Differentialgleichungen durch den Einsatz von CFD erleichtert wurde und oftmals

kostspielige sowie aufwendige, messtechnische Experimente hinsichtlich turbulenter Strömungen vermieden werden können.

Zur numerischen Berechnung turbulenter Strömungen stehen im Wesentlichen drei Simulationsverfahren, auf die in Kapitel 2.3 genauer eingegangen wird, zur Verfügung:

- Direkte Numerische Simulation, kurz DNS
- statistische Turbulenzmodellierung,
bspw. RANS (engl.: **R**aynolds **A**veraged **N**avier **S**tokes Equations)
- Large Eddy Simulation, kurz LES (dt.: Großskalensimulation)

Im Rahmen dieser Arbeit wird die bereits in den 1960er Jahren aus dem Bereich der Meteorologie entstandene LES angewendet. Dennoch ist diese Methode immer noch Gegenstand aktueller Forschung. So spielen beispielsweise die Einströmbedingungen in das Rechengebiet eine essentielle Rolle für das weitere Strömungsverhalten. Der Grund dafür ist, dass die Eintrittsströmung stochastisch schwankende Fluktuationen beinhalten müssen, die im Idealfall wie Turbulenz „aussehen“ und sich ebenso verhalten.

1.2 Zielsetzung

Trotz der enormen Steigerung an Rechenleistung wird es auch in den nächsten Jahrzehnten nicht möglich sein, die Strömungsverhältnisse einer kompletten Turbomaschine mithilfe von Large Eddy Simulationen zu bestimmen. Im Kontext des *Virtuellen Triebwerks* ist die Verwendung von skalenauflösenden Verfahren in der Auslegung von Turbomaschinenkomponenten dennoch ein angestrebtes Ziel des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt und dessen Entwicklungspartner in der Industrie.

Jedoch wird es hierfür nötig sein, adäquate turbulente Zuströmbedingungen vorzugeben, sodass eine akkurate Beschreibung der erzeugten turbulenten Wirbelstrukturen möglich ist.

In dieser Masterarbeit soll deshalb eine Analyse der synthetisch erzeugten Turbulenz erfolgen. Die turbulenten Strukturen werden dabei basierend auf einem ausgewählten,

sogenannten synthetischen Turbulenzgenerator erzeugt und in das Strömungsfeld eingebracht.

Zum Einbringen der Fluktuation in das Strömungsfeld werden zwei Verfahren unterschieden und im Rahmen dieser Arbeit untersucht. Einerseits besteht die Möglichkeit die synthetisch erzeugten Wirbelstrukturen als Eintrittsrandbedingung zu formulieren oder diese andererseits im Sinne einer Quelltermformulierung der Strömung aufzuprägen. Beide Varianten werden diesbezüglich anhand von zwei generischen Testfällen, einer räumlich zerfallenden isotropen Turbulenz und einer turbulenten Kanalströmung, ausgewertet und validiert.

2 Grundlagen

Zu einem besseren Verständnis der erhaltenen Ergebnisse sollen in folgendem Kapitel einige Grundlagen erläutert werden. Aufbauend auf den Grundgleichungen der Strömungsmechanik wird ein Überblick über das turbulente Strömungsphänomen gegeben, um anschließend auf die verschiedenen Modellierungsansätze turbulenter Strömungen, unter anderem auf die verwendete Large Eddy Simulation, eingehen zu können.

2.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik bilden die Navier-Stokes-Gleichungen, welche unter Berücksichtigung der Massen-, Impuls-, und Energieerhaltung hergeleitet werden können. In differentieller Form lauten die instationären, kompressiblen Gleichungen unter Vernachlässigung von Volumenkräften:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \rho \left(h + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} (-q_j + u_i \sigma_{ij}) \quad (2.3)$$

Hierbei wird die Summenkonvention nach Einstein [9] verwendet, sodass über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Basierend auf der Stokesschen Hypothese muss die Spur des Spannungstensors σ_{ij} verschwinden, weshalb sich für die viskosen Spannungen mithilfe des Deformationstensors

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

und dem Kronecker-Delta der Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = 2\eta \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.5)$$

ergibt [12]. Um die Energiegleichung (Gleichung 2.3) zu schließen, wird für den Wärmestromvektor häufig eine konstitutive Gleichung gemäß

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

verwendet.

Zwei der vier thermodynamischen Zustandsvariablen Dichte, Druck, innere Energie und Temperatur sind unabhängig voneinander wählbar, während sich die übrigen Größen aufgrund von gewählten Zustandsgleichungen daraus ergeben [20]. Die ideale Gasgleichung

$$p = \rho R T \quad (2.7)$$

liefert diesbezüglich einen Zusammenhang zwischen Dichte, Druck und Temperatur. Eine Kopplung zwischen der inneren Energie und der spezifische Enthalpie bildet

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad , \quad (2.8)$$

wobei sich innere Energie und Enthalpie über die spezifischen Gaskonstanten mit der Temperatur gemäß

$$e = c_v T \quad \text{und} \quad h = c_p T \quad (2.9)$$

bestimmen lassen.

Die obigen Gleichungen bilden somit ein geschlossenes Gleichungssystem, um sowohl laminare als auch turbulente Strömungen mathematisch vollständig zu beschreiben.

2.2 Turbulenz

„Wenn ich Gott treffe, werde ich ihm zwei Fragen stellen:

Warum Relativität und warum Turbulenz?

Ich bin mir sicher, Gott hat eine Antwort auf die erste Frage.“

Dieses Zitat stammt vom Physiker und Nobelpreisträger Werner Heisenberg, als er bereits im Sterbebett lag. Es verdeutlicht wie schwer es ist, das Turbulenzphänomen zu begreifen und darüberhinaus turbulente Strukturen physikalisch richtig zu beschreiben.

Wie man allerdings weiß, sind turbulente Strömungen prinzipiell gekennzeichnet durch folgende Attribute [10]:

- chaotisch
- dreidimensional
- instationär
- wirbelbehaftet
- dissipativ
- diffusiv
- mehrskalig

Ist die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot L}{\eta} = \frac{u \cdot L}{\nu} \quad (2.10)$$

ausreichend hoch, dominieren die Trägheitskräfte gegenüber den viskosen Kräften und es bildet sich der turbulente Strömungscharakter. Demzufolge werden Anfachungen verstärkt und die Strömung schlägt von laminar zu turbulent um. Daraufhin ändern sich die Strömungsvariablen an einem festen Ort in chaotischer Art und Weise mit der Zeit. Der mittleren Hauptbewegung sind so Fluktuationen in Form von kohärenten Wirbelstrukturen überlagert. Obwohl Einzelmessungen an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit Zufallsergebnisse liefern, sind die zeitlichen Mittelwerte dagegen reproduzierbar.

Charakteristisch für turbulente Strömungen ist das typische Energiespektrum (siehe Abbildung 2.1), das sich aus mehrskaligen Strömungsstrukturen zusammensetzt. Da-

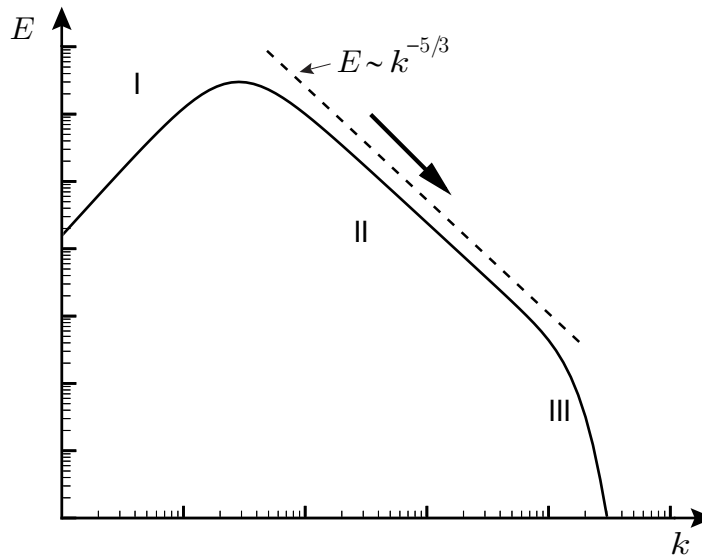


Abbildung 2.1: Energie über Wellenzahl in einem doppelt logarithmischen Diagramm

bei entsprechen große Wirbelstrukturen kleinen Wellenzahlen (Bereich I) und kleine Wirbelstrukturen großen Wellenzahlen (Bereich III). Neben dem Injektionsbereich (Bereich I, größte Skalen) und dem Dissipationsbereich (Bereich III, kleinste Skalen), bezeichnet man den mittleren Bereich als Inertialbereich (Bereich II), in dem die Energie proportional zu $k^{-5/3}$ ist.

Die Energiezufuhr erfolgt immer auf den größten Längenskalen, wo die Strömung sehr stark von Randbedingungen und der Geometrie beeinflusst ist und gleichzeitig der viskose Einfluss eine untergeordnete Rolle spielt. Die größten Längenmaße sind von der Größenordnung der Strömungsgeometrie (beispielsweise der Grenzschichtdicke). Obwohl es in der Realität durchaus auch zu einem kurzzeitigen, lokalen Energierücktransfer (engl.: Backscatter) kommen kann, werden überwiegend Teile der kinetischen Energie der großen Skalen in einer spektralen, statistischen Betrachtungsweise, entsprechend des Kaskadenprozesses, in kleinere Skalen transferiert, die wiederum in noch kleinere Wirbel mit weniger Energie zerfallen.

In den kleinsten Skalen werden viskose Kräfte allerdings dominanter, was letztendlich zur Dissipation der kinetischen in innere Energie führt [38]. Die kleinsten Wirbelstrukturen verlieren somit jegliche Information über Randbedingungen oder Geometrie, wodurch im Dissipationsbereich nahezu homogene und isotrope Turbulenz herrscht [41].

Homogene Turbulenz bedeutet dabei, dass alle zeitlich gemittelten Strömungsgrößen vom Ort unabhängig sind. Dies hat zur Folge, dass alle statistischen Größen invariant gegenüber einer räumlichen Translation sind. Weiter setzt dies eine konstante mittlere Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt voraus.

Der Spezialfall der isotropen Turbulenz liegt vor, wenn die gemittelten Turbulenzgrößen unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems sind, also invariant gegenüber Translation und Rotation sind [28]. Dementsprechend müssen die gemittelten quadrierten Geschwindigkeitsschwankungen in jeder Raumrichtung identisch sein [12]. Bei einer isotropen Strömung verfügt der Reynoldsspannungstensor, der in Kapitel 2.3.2 eingeführt wird, also über konstante Einträge auf der Hauptdiagonalen (Normalspannungen), wohingegen die Scherspannungen verschwinden. Weicht das betrachtete System von den beschriebenen Eigenschaften der isotropen Turbulenz ab, bezeichnet man es als anisotrop.

Für die kleinsten Skalen, die auch als Kolmogorov-Skalen bezeichnet werden, ergibt sich aus einer Dimensionsanalyse:

$$\text{Längenskala: } l_\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.11)$$

$$\text{Geschwindigkeitsskala: } u_\eta = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (2.12)$$

$$\text{Zeitskala: } t_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Unter der Annahme von Isotropie stellt die turbulente kinetische Energie (siehe Gleichung 2.30) in Verbindung mit der Reynoldszahl ein Maß für die charakteristische Geschwindigkeit dar ($Re = \frac{\sqrt{k}L}{\nu}$). Mithilfe der aus einer Dimensionsanalyse stammenden Beziehung $L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ und Gleichung 2.11, kann folgender Zusammenhang zwischen der Längenskala der großen Strukturen L und der Kolmogorov-Länge l_η hergeleitet werden [27]:

$$\frac{L}{l_\eta} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (2.14)$$

Im nächsten Kapitel soll nun auf die Direkte Numerische Simulation und die statistische Turbulenzmodellierung eingegangen werden. Anschließend werden die relevanten Gleichungen und Terme, bei der in dieser Arbeit verwendeten Large Eddy Simulation, erläutert.

2.3 Turbulenzmodellierung

2.3.1 Direkte Numerische Simulation

Der Zusammenhang in Gleichung 2.14 kann als eine Abschätzung der benötigten Gitterpunkte für eine Direkte Numerische Simulation genutzt werden, da die Netzauflösung mindestens die Kolmogorov-Längenskala darstellen sollte, um die Navier-Stokes-Gleichungen ohne Modellierungsansätze lösen zu können.

Wird ein dreidimensionales Problem betrachtet, skaliert die Gitterpunktzahl sogar mit $Re^{\frac{9}{4}}$. Zusätzlich ist eine hinreichend genaue Zeitapproximation der kleinsten Skalen gewünscht, sodass die Zeitschrittweite mit der Ortsschrittweite entsprechend kleiner werden muss. Mit einem turbulenten Zeitmaß

$$T = \frac{L}{u'} \quad , \quad (2.15)$$

wobei u' für die turbulente Geschwindigkeitsschwankung steht, und der Annahme, dass ein Zeitschritt durch den konvektiven Transport dominiert ist ($t \sim \frac{l_\eta}{u'}$), erhält man für die Anzahl der notwendigen Zeitschritte folgende Abhängigkeit:

$$N_t \sim \frac{T}{t} \sim \frac{L}{l_\eta} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (2.16)$$

Demzufolge ist der gesamte rechnerische Simulationsaufwand proportional zu Re^3 [28]. In Verbindungen mit den hohen Reynoldszahlen technischer Anwendungen sind DNS auch in absehbarer Zeit nicht praktikabel. Somit beschränkt sich deren Einsatz auf die Grundlagenforschung mit kleinen Geometrien und mäßigen Strömungsgeschwindigkeiten, um zu einem besseren Verständnis der Turbulenz beizutragen.

2.3.2 Statistische Turbulenzmodellierung

Eine hydrodynamische Feldgröße ψ lässt sich gemäß Abbildung 2.2 in einen Mittelwert $\bar{\psi}$ und einen Schwankungsterm ψ' zerlegen, sodass gilt:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (2.17)$$

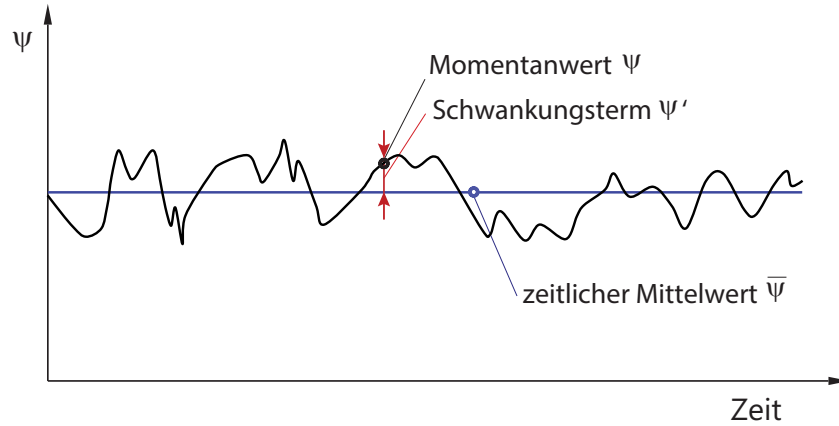


Abbildung 2.2: Zeitlicher Verlauf einer hydrodynamischen Feldgröße

Erfolgt eine Mittelung dieser Feldgröße, beispielsweise mittels einer zeitlichen Mittelwertbildung gemäß

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \psi \, dt \quad , \quad (2.18)$$

bezeichnet man diese als Reynoldsmittelung nach Reynolds [29]. Diese Reynoldsmittelung wurde in ihrer ursprünglichen Form für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Für die Simulation von Strömungen in Turbomaschinen sind die inkompressiblen Gleichungen aber hochgradig ungeeignet, da dort, bedingt durch einerseits hohe Zuströmmachzahlen und andererseits Zustandsänderungen aufgrund von mechanischer Arbeit und Wärmezufuhr, Machzahlen im hohen subsonischen und transonischen Bereich erzielt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden somit die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.3) betrachtet, die mithilfe einer dichtegewichteten zeitlichen, sogenannten Favre-Mittelung [43]

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho} \Delta t} \int_{\Delta t} \rho \psi \, dt = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho \psi} \quad (2.19)$$

gemittelt werden müssen.

Die Fluktuationen berechnen sich im Fall dieser Mittelung zu:

$$\psi'' = \psi - \tilde{\psi} \quad (2.20)$$

Nach Blazek [4] ist allerdings nicht nur die Dichte, die für Gleichung 2.19 bereits gemittelt vorliegen muss, sondern auch der Druck nach dem Reynoldsansatz zu mitteln.

Es gelten aus diesem Grund folgende Zusammenhänge:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.21)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.22)$$

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad (2.23)$$

$$e = \tilde{e} + e'' \quad (2.24)$$

$$h = \tilde{h} + h'' \quad (2.25)$$

Setzt man diese Zusammenhänge in die Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.3 ein, so erhält man die Favre-gemittelten instationären Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + \frac{\tilde{u}_i'' \tilde{u}_i''}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_j \bar{\rho} \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + \frac{\tilde{u}_i'' \tilde{u}_i''}{2} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{q}_j - \bar{\rho} \tilde{u}_j'' \tilde{h}'' + \bar{\sigma}_{ij} u_i'' - \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die chaotisch auftretenden, turbulenten Fluktuationen werden somit nicht direkt abgebildet, sondern lediglich deren Einfluss auf die gemittelte Strömung statistisch berücksichtigt. Durch die Mittelung verschwinden alle Terme mit linearen Schwankungsgrößen, wohingegen nichtlineare Ausdrücke der Schwankungsgrößen erhalten bleiben.

Die Mittelwerte der Produkte aus Dichte und Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{\rho u_i'' u_j''} = \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}$ in der Favre-gemittelten Impulsgleichung 2.27 bezeichnet man als Reynoldsspannungen. Dabei haben die einzelnen Schwankungen selbst den Mittelwert Null, wohingegen der Mittelwert des Produkts von Null verschieden sein kann. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Korrelation der Schwankungsgrößen. Auf die Bestimmung solcher Korrelationen wird im Zuge der Auswertung der Simulationsergebnisse genauer eingegangen (siehe Kapitel 5.1.3).

Der symmetrische Reynoldsspannungstensor

$$\tau_{ij} = \widetilde{u_i'' u_j''} \quad (2.29)$$

beschreibt physikalisch den Impulstransport bedingt durch die turbulente Strömungscharakteristik. Aufgrund des zunächst noch unbekannten Reynoldsspannungstensors, der nicht von den Mittelwerten $\widetilde{u_i}$ und \bar{p} , sondern von höheren Momenten der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichten abhängt, sind die Favre-gemittelten Gleichungen unvollständig, damit nicht geschlossen und können ohne zusätzliche Information nicht gelöst werden [10]. Man bezeichnet dies auch als das Schließungsproblem der Turbulenz, da die Formulierung von zusätzlichen Gleichungen für die sechs Korrelationen aufgrund der Nichtlinearität des Problems zu immer neuen Unbekannten führt. Um dieses Problem zu lösen, müssen im Fall der statistischen Turbulenzmodellierung Modelle für die Reynoldsspannungen eingeführt werden [28].

Abschließend ist es vorteilhaft, an dieser Stelle die in Gleichung 2.28 vorkommende turbulente kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2} \widetilde{u_i'' u_i''} \quad (2.30)$$

sowie den daraus abgeleiteten Turbulenzgrad

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{\sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}} \quad (2.31)$$

zu definieren, da die beiden Größen für die Beschreibung und Auswertung der durchgeführten Simulationen von Bedeutung sein werden.

2.3.3 Large Eddy Simulation

Die Grundidee der LES ist die Vorteile der DNS und der statistischen Turbulenzmodellierung im Bezug auf Rechendauer und Modellierungsaufwand zu kombinieren (siehe hierzu Abbildung 2.3). Obwohl das Energiespektrum in Abbildung 2.1 ein kontinuierliches Spektrum über mehrere Dekaden ist, gibt es dennoch Unterschiede in den Eigenschaften der großen und kleinen Skalen (siehe Tabelle 2.1). Das Ziel einer LES ist, große Skalen explizit aufzulösen, wohingegen kleinere Skalen modelliert werden,

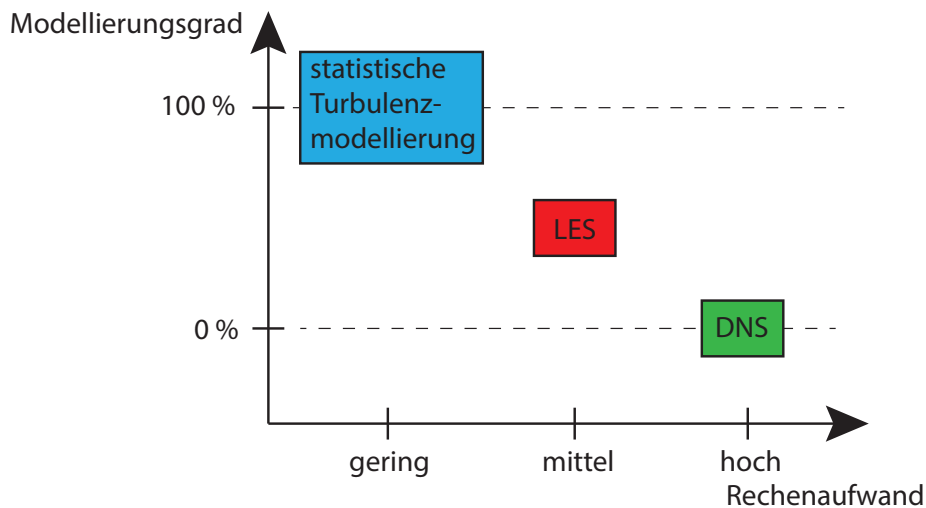


Abbildung 2.3: Vergleich der Turbulenzmodellierungen hinsichtlich Modellierungsgrad und Rechenaufwand

Tabelle 2.1: Unterschiede zwischen großen und kleinen Skalen unter idealisierten Bedingungen [35]

große Skalen	kleine Skalen
werden von mittlerer Strömung generiert	Zufallsprodukte der großen Skalen
abhängig von den Randbedingungen	universell
geordnet	zufällig
erfordert gezielte Beschreibung	können statistisch modelliert werden
inhomogen	homogen
anisotrop	isotrop
langlebig	kurzlebig
diffusiv	dissipativ
schwierig zu modellieren	leicht zu modellieren

und, verbunden damit, eine Trennung zwischen Grob- und Feinstrukturen einzuführen. Dieses Vorgehen bietet sich an, da die kleineren Skalen einen eher universellen Charakter haben, einfacher zu modellieren sind und der Nettoenergie transfer im Mittel von den großen auf die kleineren Wirbelstrukturen geschieht.

Die Skalenunterscheidung wird mithilfe einer Filterung getroffen, sodass sich eine hydrodynamische Feldgröße ψ in einen gefilterten Grobstrukturanteil $\langle \psi \rangle$ und einen Feinstrukturanteil ψ''' folgendermaßen aufteilen lässt:

$$\psi = \langle \psi \rangle + \psi''' \quad (2.32)$$

2.3.3.1 Filterung

Gemäß Leonard [19] werden die großen Skalen mit folgender räumlicher Filtervorschrift durch ein sogenanntes Faltungsintegral bestimmt, wobei entsprechend einem Tiefpassfilter F die kleinen, hochfrequenten Strukturen mithilfe der ortsabhängigen Filterweite Δ abgetrennt werden:

$$\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \Delta(\mathbf{x})) \psi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (2.33)$$

Die Größen \mathbf{x} und $\boldsymbol{\xi}$ repräsentieren hierbei Vektoren im Rechengebiet \mathbb{R}^3 . Für den Filterkern muss folgende Bedingung gelten:

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \Delta(\mathbf{x})) d\boldsymbol{\xi} = 1 \quad (2.34)$$

Der Vorteil einer Filterung gegenüber einer Mittelwertbildung, wie in Kapitel 2.3.2, liegt darin, dass je nach gewählter Filterbreite unterschiedlich stark gemittelt werden kann, was den Multiskalencharakter von Turbulenz widerspiegelt. Da im Rahmen dieser Arbeit die LES in Verbindung mit einer Finiten-Volumen-Methode verwendet wird, ist es zweckmäßig einen Top-Hat-Filter (auch bekannt als Rechteckfilter) mit der räumlichen Gitterschrittweite als Filterweite anzuwenden:

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \leq \frac{1}{2}\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.35)$$

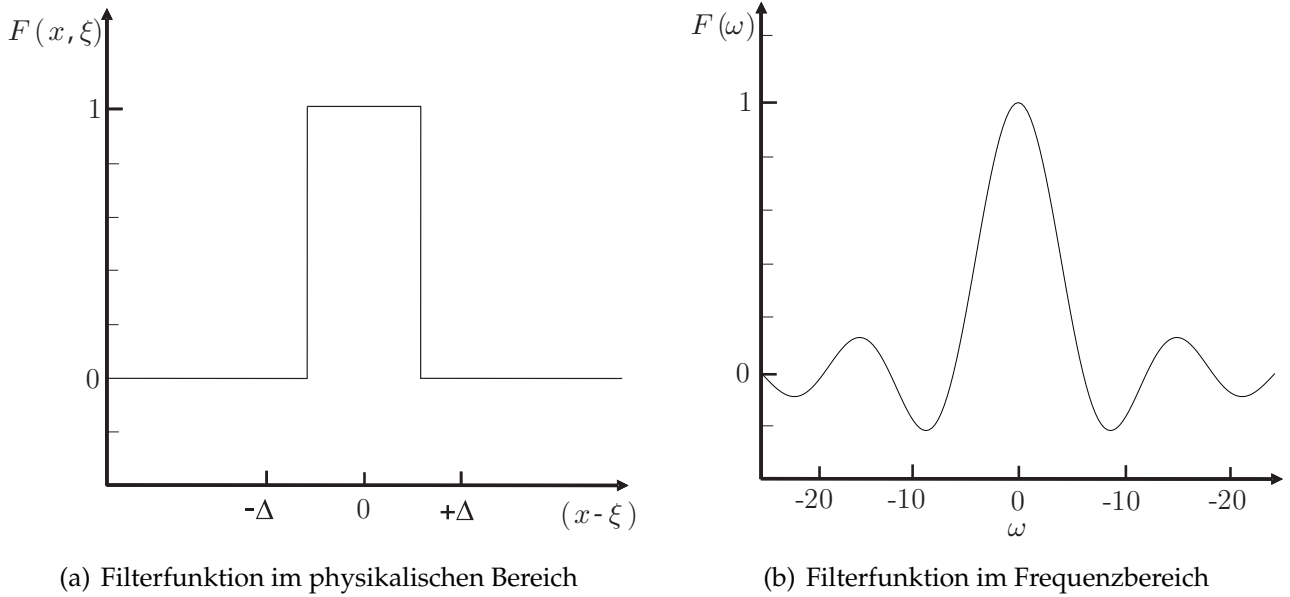


Abbildung 2.4: Top-Hat-Filter für $\Delta = 1$

Die benötigte Filterweite berechnet sich aus dem Volumen der jeweiligen Gitterzelle, sodass bei ausschließlicher Verwendung von quaderförmigen Zellen demnach gilt:

$$\Delta = V^{\frac{1}{3}} = (h_x h_y h_z)^{\frac{1}{3}} \quad (2.36)$$

Die Filterdefinition des Top-Hat-Filters ermöglicht eine einfache Integration über die Filterweite und entspricht darüber hinaus einer Mittelung in diesem Bereich. Aufgrund seiner Wirkungsweise im Frequenzbereich führt er zu keiner scharfen Trennung von kleinen und großen Skalen bei der zur Gitterauflösung gehörigen Wellenzahl k_{cut} , sondern ermöglicht eine Dämpfung (siehe Abbildung 2.5).

Für kompressible Strömungen ist an dieser Stelle wieder der Ansatz nach Favre sinnvoll, wobei gefilterte Variablen mit der gefilterten Dichte gewichtet werden. Mathematisch ausgedrückt lautet diese Formulierung [11]:

$$\langle \rho \psi \rangle = \langle \rho \rangle \widetilde{\langle \psi \rangle} \quad (2.37)$$

Jede hydrodynamische Strömungsgröße ψ wird demzufolge in einen Favre-gemittelten Grobstrukturanteil $\widetilde{\langle \psi \rangle}$ und einen Feinstrukturanteil ψ''' aufgespalten:

$$\psi = \widetilde{\langle \psi \rangle} + \psi''' \quad (2.38)$$

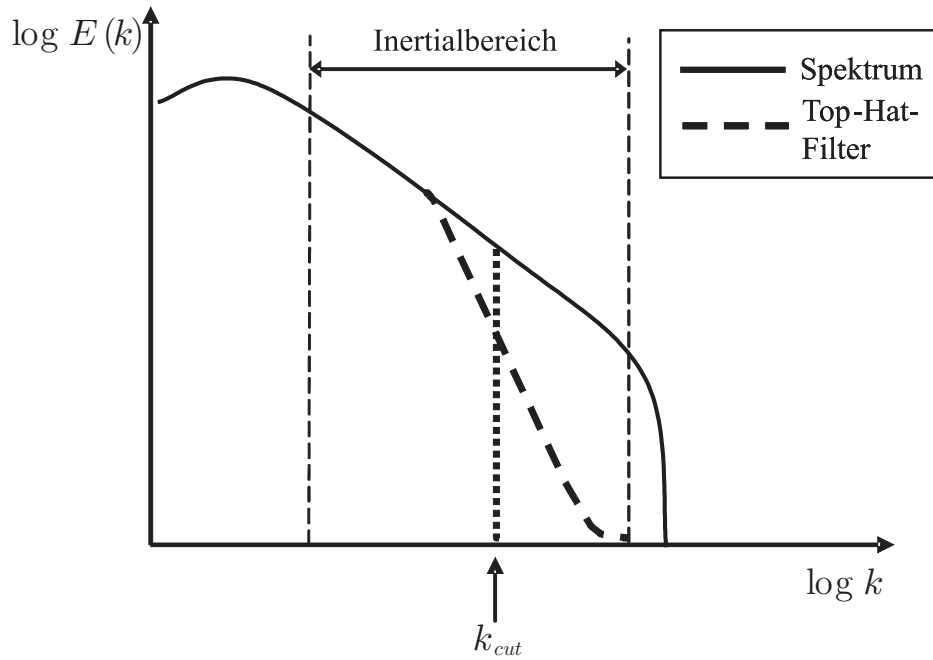


Abbildung 2.5: Gefiltertes Spektrum angelehnt an [41]

2.3.3.2 Gefilterte Gleichungen

Um zu einem besseren und anschaulicheren Verständnis der gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen für den kompressiblen Fall beizutragen, ist es zweckmäßig darzulegen, dass die Energiegleichung (siehe Gleichung 2.3) mithilfe folgender Zusammenhänge für die spezifische Gesamtenergie E_{spez}

$$\rho E_{spez} = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \quad (2.39)$$

und für den Druck

$$p = \rho (\gamma - 1) e \quad (2.40)$$

in eine Gesamtenergiegleichung

$$\frac{\partial \rho E_{spez}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E_{spez} + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-q_j + u_i \sigma_{ij}) \quad (2.41)$$

umgeschrieben werden kann.

Wendet man nun die Favre-Filterung auf beide Seiten der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen 2.1 und 2.2 an, erhält man die entsprechenden Favre-gefilterten kompressiblen, instationären Gleichungen [11]:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \widetilde{\langle u_i \rangle}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle \widetilde{\langle u_i \rangle}}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \widetilde{\langle u_i \rangle} \widetilde{\langle u_j \rangle}}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \langle \rho \rangle \nu_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \sigma_{ij} \rangle - \check{\sigma}_{ij}) \quad (2.43)$$

Nicht die Energiegleichung 2.3 wird für die Herleitung der gefilterten kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gefiltert, sondern die Gesamtenergiegleichung 2.39. Wendet man die Favre-Filterung darauf an, ergibt sich:

$$\langle \rho \rangle \widetilde{\langle E \rangle} = \frac{\langle p \rangle}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \widetilde{\langle u_i \rangle} \widetilde{\langle u_i \rangle} \quad (2.44)$$

Zur Herleitung der Energiegleichung, ausgehend von dieser Gleichung, gibt es mehrere Verfahren. Eine Methode, die sich besonders anbietet, da dabei keine thermodynamischen Variablen modifiziert werden müssen, ist die Methode nach Vreman [40]. Dabei wird die berechenbare Energie durch folgenden Ausdruck definiert:

$$\check{E} = \frac{\langle p \rangle}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \widetilde{\langle u_i \rangle} \widetilde{\langle u_i \rangle} \quad (2.45)$$

Eine zeitliche Ableitung dieser Gleichung liefert schließlich die Favre-gefilterte kompressible Energiegleichung:

$$\frac{\partial \check{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\check{E} + \langle p \rangle) u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij} \widetilde{\langle u_j \rangle}}{\partial x_j} + \frac{\partial \check{q}_j}{\partial x_j} = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \quad (2.46)$$

Die nun komplettierten gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen 2.42, 2.43 und 2.46 sind so angeordnet, dass man auf den linken Seiten die gefilterten Variablen $\langle \rho \rangle$, $\langle p \rangle$ und die Favre-gefilterten $\widetilde{\langle u_i \rangle}$ findet. Auf den rechten Seiten stehen die sogenannten Feinstrukturterme. Während die Kontinuitätsgleichung keine dieser Terme enthält, entsteht aufgrund der Nichtlinearität der viskosen Terme in der Impulsgleichung und den Eigenschaften der Favre-Filterung ein neuer Term $\check{\sigma}_{ij}$ analog zu den Gleichungen 2.4 und 2.5:

$$\check{\sigma}_{ij} = 2\eta \left(\widetilde{\langle s_{ij} \rangle} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \widetilde{\langle s_{kk} \rangle} \right) \quad \text{mit} \quad \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{\langle u_i \rangle}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{\langle u_j \rangle}}{\partial x_i} \right) \quad (2.47)$$

Ergänzend entsteht in der Impulsgleichung aufgrund der Nichtlinearität der konvektiven Terme ein neuer Term, der sogenannte turbulente Spannungstensor

$$\iota_{ij} = \langle \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle - \langle \widetilde{u_i} \rangle \langle \widetilde{u_j} \rangle, \quad (2.48)$$

der sich aus zwei Feinstrukturtermen zusammensetzt.

Die Feinstrukturterme der Energiegleichung sind folgendermaßen definiert:

$$\alpha_1 = \langle \widetilde{u_i} \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle \iota_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.49)$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \left(\langle p u_j \rangle - \langle p \rangle \langle \widetilde{u_j} \rangle \right)}{\partial x_j} / (\gamma - 1) \quad (2.50)$$

$$\alpha_3 = \left\langle p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\rangle - \langle p \rangle \frac{\partial \langle \widetilde{u_j} \rangle}{\partial x_j} \quad (2.51)$$

$$\alpha_4 = \left\langle \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle - \langle \sigma_{ij} \rangle \frac{\partial \langle \widetilde{u_i} \rangle}{\partial x_j} \quad (2.52)$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \sigma_{ij} \rangle \langle \widetilde{u_i} \rangle - \check{\sigma}_{ij} \langle \widetilde{u_i} \rangle \right) \quad (2.53)$$

$$\alpha_6 = \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle q_j \rangle - \check{q}_j) \quad (2.54)$$

Die Bedeutung der einzelnen Terme auf der rechten Seite der Energiegleichung 2.46 sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Da die Feinstrukturterme immer Informationen über das ungefilterte Strömungsfeld enthalten, müssen Feinstrukturmodelle eingeführt werden, um die Navier-Stokes-Gleichungen ausschließlich in gefilterten Variablen ausdrücken zu können. Für geringe Machzahlen hat sich gezeigt, dass es ausreichend ist, lediglich den turbulenten Feinstrukturspannungstensor ι_{ij} zu modellieren [40].

2.3.3.3 Feinstrukturmodelle

Wie in Kapitel 2.3.3.2 bereits erwähnt, muss ein Modell, das sogenannte Feinstrukturmodell, eingeführt werden, damit der Feinstrukturspannungstensor modelliert werden kann ($\iota_{ij}^{mod} \approx \iota_{ij}$). Ein Feinstrukturmodell soll in der Lage sein, die Auswirkungen der nicht aufgelösten Skalen auf die großen Skalen abzubilden. Ganz analog zu den statistischen Turbulenzmodellierungen führt der LES-Ansatz ebenso zu dem Schließungsproblem der Turbulenz.

Tabelle 2.2: Feinstrukturterme in der Favre-gefilterten Energiegleichung nach Vreman [40]

Variable	Name	Bedeutung
α_1	turbulente Spannungen (auf skalarer Größenordnung)	repräsentiert kinetischen Energietransport von aufgelösten Skalen zu Feinstrukturskalen
α_2	Druck-Geschwindigkeitsterm	Abbildung des Einflusses der Feinstrukturturbulenz auf Wärmeleitung in den aufgelösten Skalen
α_3	Druckausbreitung	Kompressibilitätseffekt, der verschwindet, falls Strömung bei konstanter Dichte divergenzfrei ist
α_4	Feinstrukturdissipationsrate	repräsentiert viskose Dissipation von kinetischer Energie in innere Energie
α_5	Feinstrukturspannungsterm	Terme werden klein bei hohen Reynoldszahlen
α_6	Feinstrukturwärmestromterm	Terme werden klein bei hohen Reynoldszahlen

Um den Feinstrukturanteil modellieren zu können, ist es möglich die Feinstrukturspannungen zum Beispiel gemäß dem Boussinesq-Ansatz [5] und den damit verbundenen Wirbelviskositätsmodellen in die Spur des Tensors und dessen anisotropen, spurfreien Teil aufzuteilen. Für diesen spurfreien Teil des Feinstrukturspannungstensors, der modelliert werden muss, gilt demnach:

$$\iota_{ij}^a = \iota_{ij} - \frac{1}{3}\iota_{kk}\delta_{ij} \quad (2.55)$$

Der nicht modellierte Anteil ι_{kk} wird mit dem Druck zu einem Pseudo-Druck in der Impulsgleichung zusammengefasst und findet auf diese Weise seine Berücksichtigung.

2.3.3.3.1 Smagorinsky-Modell

Das Smagorinsky-Modell nach Smagorinsky [37] entstand bereits 1963 und basiert auf dem Wirbelviskositätsansatz nach Boussinesq. Die Wirbelviskosität ν_t , auch turbulente Viskosität genannt, wird eingeführt um die Proportionalität zwischen den Feinstruk-

turspannungen und dem großskaligen Scherspannungstensor zu bilden:

$$\nu_{ij}^{a,mod} = -2\nu_t \widetilde{\langle s_{ij}^0 \rangle} \quad (2.56)$$

Dabei ist die Spurfreiheit der rechten Seite durch die Verwendung von $\widetilde{\langle s_{ij}^0 \rangle} = \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\widetilde{\langle s_{kk} \rangle}$ gewährleistet. Mithilfe der Prandtlschen Mischungsweghypothese kann gezeigt werden, dass aus dimensionsanalytischen Gründen für die Wirbelviskosität folgender Zusammenhang aus einer charakteristischen Länge und Geschwindigkeit gilt:

$$\nu_t = l_{FS} u_{FS} \quad (2.57)$$

Nach Smagorinsky [37] berechnet sich die charakteristische Geschwindigkeit des Feinstrukturmodells zu

$$u_{FS} = l_{FS} \left| \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \right|, \quad (2.58)$$

wobei für den Betrag des Deformationsgeschwindigkeitstensors gilt:

$$\left| \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \right| = \sqrt{2 \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \widetilde{\langle s_{ij} \rangle}} \quad (2.59)$$

Weiterhin kann für die Bestimmung der charakteristischen Länge die Filterweite Δ gemäß

$$l_{FS} = C_s \Delta \quad (2.60)$$

verwendet werden. Typische Werte für die Modellkonstante C_s , die auch von der zu simulierenden Strömungssituation abhängt, liegen im Bereich zwischen 0,067 und 0,24 (siehe [22] und [31]).

Zusammengefasst lautet das Smagorinsky-Modell demnach:

$$\nu_{ij}^{a,SM} = -2 (C_s \Delta)^2 \left| \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \right| \widetilde{\langle s_{ij}^0 \rangle} \quad (2.61)$$

Anzumerken ist, dass das Smagorinsky-Modell in Wandnähe keine brauchbaren Ergebnisse liefert. Dies liegt vor allem an dem laminaren Strömungscharakter in der viskosen Unterschicht. In der Nähe einer Wand werden alle turbulenten Fluktuationen stark gedämpft, dies bedeutet, dass es zu einem Abfall der Wirbelviskosität kommen muss. Für diese wandnahen, anisotropen Strömungen wurden selektive Feinstrukturmodelle, wie beispielsweise das WALE-Modell entwickelt.

2.3.3.3.2 WALE-Modell

Das WALE-Modell (engl.: **W**all-**A**daptive **L**ocal **E**ddy **V**iscosity) nach Ducros et al. [8] wurde entwickelt, um auch bei komplexeren Geometrien in Verbindung mit anisotropen Strömungen akzeptable Ergebnisse mit Large Eddy Simulationen zu erzielen. Ebenso wie das Smagorinsky-Modell basiert das WALE-Modell auf der Wirbelviskositätsannahme und der damit verbundenen Proportionalität zwischen den Feinstrukturspannungen und dem Scherspannungstensor (siehe Gleichung 2.56). Damit die turbulente Viskosität ν_t , wie auch bei dem Smagorinsky-Modell, über eine Invarianz gegenüber einer Koordinatentransformation verfügt, wird der Geschwindigkeitsgradiententensor

$$\widetilde{\langle g_{ij} \rangle} = \frac{\partial \widetilde{\langle u_j \rangle}}{\partial x_i} \quad (2.62)$$

verwendet [25]. Die Wirbelviskosität wird mithilfe des Deformationstensors (analog zu Gleichung 2.47)

$$\widetilde{\langle s_{ij} \rangle} = \frac{1}{2} \left(\widetilde{\langle g_{ij} \rangle} + \widetilde{\langle g_{ji} \rangle} \right) \quad (2.63)$$

und dessen spurfreien, symmetrischen Anteils, der mit den Quadraten des Geschwindigkeitsgradiententensors gebildet wird,

$$s_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\widetilde{\langle g_{ij}^2 \rangle} + \widetilde{\langle g_{ji}^2 \rangle} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \widetilde{\langle g_{kk}^2 \rangle} \quad (2.64)$$

bestimmt:

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{\frac{3}{2}}}{\left(\widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \widetilde{\langle s_{ij} \rangle} \right)^{\frac{5}{2}} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{\frac{5}{4}}} = (C_w \Delta)^2 \frac{\zeta}{\theta} \quad (2.65)$$

Um die Schreibweise abzukürzen, stehen die Hilfsvariablen ζ und θ stellvertretend für Zähler und Nenner des Bruchs.

Zusammengefasst berechnen sich die Feinstrukturspannungen zu:

$$\tau_{ij}^{a,WALE} = -2 (C_w \Delta)^2 \frac{\zeta}{\theta} \widetilde{\langle s_{ij}^0 \rangle} \quad (2.66)$$

Darin repräsentiert Δ die Filterweite und C_w die Modellkonstante des WALE-Modells. Gemäß Nicoud und Ducros [25] kann diese Konstante durch einen Vergleich mit dem Smagorinsky-Modell bestimmt werden, sodass die gleiche kinetische Energie durch das Feinstrukturmodell dissipiert wird. Unter der Annahme, dass ν_t nicht mehr von der Wellenzahl abhängig ist und dass die Dissipation identisch der Dissipation einer

isotropen, inkompressiblen Strömung ist, erhält man für die Dissipationsrate

$$\epsilon = 2\nu_t \overline{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle} \quad . \quad (2.67)$$

Durch Gleichsetzen der dissipierten Energie der beiden Modelle ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die Modellkonstante C_w :

$$C_w^2 = C_s^2 \frac{\overline{\sqrt{2} \left(\overline{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle} \right)^{\frac{3}{2}}}}{\overline{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle}^{\frac{A}{B}}} \quad (2.68)$$

In den Gleichungen 2.68 und 2.67 bedeuten die Querstriche eine räumliche Mittelung über das gesamte physikalische Rechengebiet. Im Rahmen der Anwendung des CFD-Lösers TRACE wird eine approximierte Gleichung zur Bestimmung von C_w basierend auf empirischen Werten für α aus [25] verwendet:

$$C_w^2 = \alpha C_s^2 \quad (2.69)$$

3 Synthetischer Turbulenzgenerator

Um adäquate Eintrittsbedingungen in das Rechengebiet zu erhalten, lassen sich nach Tabor et al. [38] prinzipiell zwei Herangehensweisen unterscheiden. Dies sind zum einen die sogenannten Precursor- und Recycling-Rechnungen, wobei die Einströmdaten für die eigentliche Rechnung basierend auf einer separaten Vorsimulation erzeugt werden, um realistische Geschwindigkeitsfluktuationen vorschreiben zu können. Da ein solches Verfahren für viele industrielle Anwendungen nicht durchführbar ist, hat sich zum anderen die Verwendung von synthetischen Turbulenzgeneratoren (STG), basierend auf statistischen Größen, wie Reynoldsspannungen und integralen Werten, etabliert. Das Ziel dabei ist die künstliche Erzeugung von Geschwindigkeitsfluktuation und deren Überlagerung mit der Hauptströmung, sodass sich das charakteristische Geschwindigkeitsfeld ausbildet, die spektralen integralen Größen, wie Längen- und Zeitmaß, korrekt wiedergegeben werden und gleichzeitig die Navier-Stokes-Gleichungen erfüllt werden.

Bei der Analyse der Funktionsfähigkeit solcher Methoden steht die korrekte Abbildung der turbulenten Energiekaskade mit ihren kohärenten Wirbelstrukturen ganz besonders im Vordergrund. Dabei unterscheiden sich die Beurteilungskriterien grundlegend, wenn es darum geht eine räumlich zerfallende Turbulenz (homogene, isotrope Turbulenz) oder eine Grenzschichtströmung unter Einfluss von viskosen Wänden (anisotrope, wandbegrenzte Turbulenz) physikalisch richtig darzustellen. Ein praxisrelevanter synthetischer Turbulenzgenerator sollte dementsprechend in der Lage sein, sowohl die Isotropie einer räumlich zerfallenden Turbulenz als auch die Anisotropie in einer turbulenten Grenzschicht, verbunden mit dem Ausbilden eines turbulenten Geschwindigkeitsprofils, wiederzugeben. Gleichzeitig sollte der STG sicherstellen, dass die erzeugten Fluktuationen das gesamte reale Energiespektrum inklusive der charakteristischen Bereiche (siehe Kapitel 2.2) reproduzieren.

Druault et al. [7] zeigten bereits 2004, dass künstlich erzeugte Geschwindigkeitsfluktuationen, die lediglich einer Gauß'schen Verteilung folgen, denen also jegliche strömungsmechanische Grundlage fehlt, nicht fähig sind, das zu erwartende turbulente

Geschwindigkeitsfeld abzubilden. Die Bereitstellung von korrekten räumlichen und zeitlichen Korrelationen ist demnach essentiell für das Zustandekommen von aufgelösten, realistischen Turbulenzstrukturen. Darüber hinaus zeigte sich, dass darauf geachtet werden muss, dass die Fluktuationen nach dem Einbringen in das Strömungsfeld nicht durch die Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichungen sofort abklingen und eine unerwünschte Relaminarisierung eintritt. Ein weiteres entscheidendes Kriterium bei der Bewertung eines STG ist die Entwicklungslänge. Im Kontext der synthetisch erzeugten Turbulenz, bezeichnet man die Entwicklungslänge, als die Strecke, die die Strömung zurücklegen muss, bis sich die synthetisch erzeugten Strukturen in reale turbulente Strukturen umgewandelt haben.

Um die dargelegten, gewünschten Eigenschaften zu erhalten, wurden spezielle Methoden entwickelt, auf die im Folgenden eingegangen wird.

3.1 Überblick über verschiedene STG-Ansätze

3.1.1 POD-Methoden

Unter der POD-Methode (engl.: **P**roincipal **O**rthogonal **D**ecomposition) versteht man die Zerlegung der instationären Geschwindigkeitskomponenten in räumliche und zeitliche Eigenvektoren. Dabei kann durch eine Extraktion der Eigenmoden das Energiespektrum samt der kohärenten Wirbelstrukturen beschrieben werden. Um ein realistisches turbulentes Strömungsverhalten zu erhalten, wird das POD-Verfahren darüber hinaus mit einem geeigneten stochastischen Verfahren gekoppelt [33]. Allerdings findet diese Methode bis zum heutigen Zeitpunkt wenig Anwendung, da, wie Wollblad und Davidson [44] für Kanalströmungen zeigten, im Vorhinein immer eine aufwendige DNS durchgeführt werden muss, damit Referenzwerte für die POD-Methode vorliegen.

3.1.2 SEM-Methoden

Die SEM (engl.: **S**ynthetic **E**ddy **M**ethod) nach Jarrin et al. [14] basiert auf einer lagrangeschen Betrachtungsweise der Wirbelstrukturen. Dabei werden die Wirbel ihrer Größe nach spektral zerlegt und in einer virtuell aufgespannten Box zufällig platziert.

Ein räumlicher Schnitt durch diese virtuelle Box dient schließlich als Eingangsparameter für die eigentliche Simulation. Am Einströmrand werden so die durch die Wirbel erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen mit dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld überlagert. Pamiès et al. [26] zeigten, dass diese synthetische Methode, für die allerdings eine separate Vorsimulation notwendig ist, eine erheblich kürzere Entwicklungslänge verglichen mit den Fourier-Techniken (siehe Kapitel 3.1.4) benötigt und außerdem eine Ausbildung von unphysikalischen Frequenzen aufgrund der Nichtperiodizität in Strömungsrichtung vermieden wird.

3.1.3 Digitales Filterkonzept

Beim digitalen Filterkonzept werden Zufallszahlen erzeugt und anschließend digital gefiltert, sodass die gewünschten statistischen Eigenschaften, wie zeitliche und räumliche Korrelationen, erzielt werden. Die Liste der Eingangsparameter und empirischen Zusammenhänge ist im Gegensatz zu anderen Methoden verhältnismäßig kurz, obwohl diese Methode sehr aufwändig zu implementieren ist. Bei einem bekannten Vertreter dieser Gruppe, dem Konzept nach Klein et al. [17], müssen lediglich ein integrales Zeit- und zwei integrale Längenmaße vorgegeben werden. Dennoch liefert das digitale Filterkonzept je nach Ausführung akzeptable Entwicklungslängen im Bereich von 5 bis 20 Grenzschichtdicken [26].

3.1.4 Fourier-Techniken

Oft werden turbulente Strömungen durch eine Zerlegung in eine Reihe aus harmonischen Funktionen gemäß den Gesetzen der Fourier-Technik betrachtet. Dieser Prozess lässt sich ebenso umkehren und ist dementsprechend als inverse Fourier-Technik im Bereich der STG bekannt. Dabei werden diskrete Geschwindigkeitssignale im physikalischen Raum in entsprechende Signale im Frequenzbereich durch eine Fouriertransformation umgewandelt. Das Parsevalsche Theorem liefert in diesem Zusammenhang die Abhängigkeit zwischen dem Energiespektrum und dem Geschwindigkeitsfeld [33]. Gemäß Untersuchungen von Adamian et al. [2] sind Fourier-Techniken im Stande Entwicklungslängen von lediglich 2 bis 4 Grenzschichtdicken zu liefern. Basierend auf dem Grundgedanken, der Summation von Fourier-Modi nach Kraichnan [18] mit zufälligen Amplituden und Phasenwinkeln, wurden die vorhandenen Ansätze durch Shur et al. [36] weiterentwickelt. Da diese STG-Methode Anwendung in der vorliegenden Arbeit findet, wird sie im folgenden Kapitel detailliert erläutert.

3.2 Konzept des STG basierend auf der Fourier-Technik

Der in dieser Arbeit verwendete synthetische Turbulenzgenerator basiert auf dem Konzept von Shur et al. [36] und wird sowohl als Einströmrandbedingung als auch gemäß einer Quelltermformulierung (siehe Kapitel 4.3) verwendet. Die auf Kraichnan [18] aufbauende, modifizierte Methode ist in der Lage die Anisotropie der Wirbelstrukturen adäquat wiederzugeben, was insbesondere wichtig ist, wenn es um die korrekte Ausbildung von turbulenten Grenzschichten unter viskosem Wandeinfluss geht. Wie bei der statistischen Turbulenzmodellierung üblich, kann der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in eine mittlere Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ und in einen Fluktuationsanteil $\mathbf{u}''_{syn}(\mathbf{r}, t)$, welcher in diesem Fall synthetisch erzeugt wird, zerlegt werden. Mithilfe des Ortsvektors $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ erhält man:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}''_{syn}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

Damit die in diesem Kapitel hergeleiteten Geschwindigkeitsfluktuation miteinander korrelieren, wird eine Transformation nach Lund et al. [21] verwendet. Dabei werden die Geschwindigkeitsfluktuationen aus Gleichung 3.1 mittels eines Tensors \mathbf{A} und eines Fluktuationsvektors \mathbf{v}'' gebildet:

$$u''_{syn,i}(\mathbf{r}, t) = a_{ij}v''_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.2)$$

Die eingeführten Fluktuationen erfüllen hierbei auch die Bedingungen $\tilde{v}''_j = 0$ und $\widetilde{v''_i v''_j} = \delta_{ij}$, sodass der Reynoldsspannungstensor korrekt gebildet wird. Der Tensor \mathbf{A} basiert dabei auf der Cholesky-Zerlegung des Reynoldsspannungstensors $\tau_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mit:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau_{xx}} & 0 & 0 \\ \tau_{yx}/a_{xx} & \sqrt{\tau_{yy} - a_{yx}^2} & 0 \\ \tau_{zx}/a_{xx} & (\tau_{zx} - a_{yx}a_{zx})/a_{yy} & \sqrt{\tau_{zz} - a_{zx}^2 - a_{zy}^2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitsfluktuationen aus Gleichung 3.1 muss dementsprechend lediglich der Fluktuationsvektor \mathbf{v}'' bestimmt werden. Dies geschieht mithilfe einer Superposition aus gewichteten Fouriermoden in Abhängigkeit von Ort und Zeit:

$$\mathbf{v}''(\mathbf{r}, t) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} [\sigma^n \cos(k^n \mathbf{d}^n \cdot \mathbf{r}' + \phi^n)] \quad (3.4)$$

Dabei ist

- N die Anzahl der Moden
- q^n die normierte Amplitude der n -ten Mode (wobei q^n durch das lokale Energiespektrum definiert ist)
- \mathbf{d}^n ein zufallsbedingter Einheitsvektor, gleichmäßig verteilt über eine Kugel
- k^n die Amplitude des Wellenzahlvektors der n -ten Mode: $\mathbf{k}^n = k^n \mathbf{d}^n$
- σ^n ein Einheitsvektor normal zu \mathbf{d}^n ($\sigma^n \cdot \mathbf{d}^n = 0$)
- ϕ^n die Phase der n -ten Mode (zufallsbedingte Zahl, gleichmäßig verteilt im Intervall $[0, 2\pi)$)

Besonders hervorzuheben ist, dass alle Größen, welche in Gleichung 3.4 eingehen, lediglich zu Beginn der Simulation bestimmt werden müssen und dadurch die fest vorgeschriebene Menge an Wellenzahlen k^n schneller Relaminarisierung der Strömung vorbeugt. Um allerdings eine notwendige Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen, wird ein „Wellenkonvektions“-Ansatz gemacht. Dabei gilt für den Scheinpositionsvektor \mathbf{r}' in Gleichung 3.4

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{k^n \max\{l_e(\mathbf{r})\}} (x - u_{makro}t) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

wobei u_{makro} eine makroskopische Geschwindigkeit, beispielsweise die mittlere Geschwindigkeit, der Strömung beschreibt. Das lokale Längenmaß $l_e = 2\pi/k_e$ wiederum gehört zu den Wirbelstrukturen, die einen Großteil der Energie beinhalten (siehe Abbildung 3.1).

Die normierte Amplitude q^n aus Gleichung 3.4 kann durch ein vorgeschriebenes Spektrum der turbulenten Energie in Abhängigkeit der Wellenzahl k^n folgendermaßen definiert werden:

$$q^n = \frac{E(k^n) \Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n) \Delta k^n}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1 \quad (3.6)$$

Die turbulente Energie $E(k)$ wird dabei durch ein modifiziertes Von-Karman-Spektrum gemäß Abbildung 3.1 repräsentiert. In Formeln kann dies unter Verwendung der Wel-

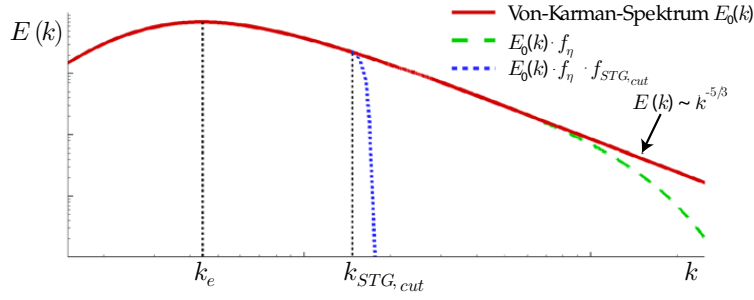


Abbildung 3.1: Modifiziertes Energiespektrum für den STG nach Shur et al. [36]

lenzuhl k_e , die zum Energiemaximum gehört, ausgedrückt werden:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2,4 (k/k_e)^2]^{\frac{17}{6}}} f_\eta f_{STG,cut} \quad (3.7)$$

Die dämpfenden Funktionen f_η und $f_{STG,cut}$ entstehen aus rein empirischen Ansätzen

$$f_\eta = \exp[-(12k/k_\eta)^2] \quad \text{und} \quad (3.8)$$

$$f_{STG,cut} = \exp\left[-\left(\frac{4 \max(k - 0,9k_{STG,cut}, 0)}{k_{STG,cut}}\right)^3\right] \quad \text{mit} \quad k_{STG,cut} = \frac{2\pi}{l_{STG,cut}}, \quad (3.9)$$

wobei unter Verwendung der lokalen Schrittweiten h_x, h_y, h_z sowie deren Maximalwert $h_{max} = \max(h_x, h_y, h_z)$ gilt:

$$l_{STG,cut} = 2 \min\{[\max(h_y, h_z, 0,3h_{max}) + 0,1d_w], h_{max}\} \quad (3.10)$$

Die Funktion f_η sorgt dafür, dass das Energiespektrum in der Nähe der Wellenzahl, die zum Kolmogorov-Längenmaß (siehe Gleichung 2.11) gehört, gedämpft wird. Wohingegen die Funktion $f_{STG,cut}$ zu einer Dämpfung des Spektrums für Wellenzahlen, die größer als der Nyquistwert $k_{STG,cut}$ (siehe Abbildung 3.1) sind, führt.

Das zur Bestimmung der Wellenzahl benötigte Längenmaß l_e ist allerdings von entscheidender Bedeutung für das Zustandekommen eines realitätsnahen turbulenten Geschwindigkeitsfelds. Es wird die Annahme getroffen, dass l_e proportional zum turbulenten Längenmaß L_T , aber nicht größer als der doppelte Wandabstand d_w ausgehend vom aktuellen Zellzentrum ist. Mit einer empirischen Konstante $C_l = 3,0$ lautet

diese Definition:

$$l_e = \min(2d_w, C_l L_T) \quad (3.11)$$

Basierend auf der kleinsten zu berücksichtigenden Wellenzahl k^{min} lassen sich alle weiteren Wellenzahlen für Gleichung 3.4 über folgende geometrische Reihe bestimmen:

$$k^n = k^{min} (1 + \alpha)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad \alpha = 0,01 \quad (3.12)$$

Dabei gilt

$$k^{min} = \beta k_e^{min} \quad (3.13)$$

mit der empirischen Konstante $\beta = 0,5$ und

$$k_e^{min} = 2\pi/l_e^{max} \quad \text{mit} \quad l_e^{max} = \max\{l_e(\mathbf{r})\} \quad . \quad (3.14)$$

Für die Anzahl der zu berücksichtigenden Moden N in Gleichung 3.4 muss schließlich gelten:

$$k^N \geq k_{max} = 1,5 \max\{k_{STG,cut}(\mathbf{r})\} \quad (3.15)$$

4 Numerisches Setup

In diesem Kapitel wird zunächst der verwendete CFD-Löser TRACE vorgestellt. Daraufhin werden die Randbedingungen, welche für die Anwendung eines STG vorhanden sein müssen, erläutert. Außerdem werden die zwei untersuchten Herangehensweisen zum Einbringen der synthetischen Turbulenz im Detail beschrieben.

4.1 Löser

Der verwendete parallele Multiblock-Strömungslöser TRACE, welcher im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird, wurde am Institut für Antriebstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt speziell für Turbomaschinenanwendungen entwickelt. TRACE ist in der Lage die kompressiblen, instationären gefilterten Gleichungen für den LES-Ansatz sowohl für strukturierte als auch unstrukturierte Rechennetze zu lösen. Dabei erfolgt die räumliche und zeitliche Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen über den zellzentrierten Finite-Volumen-Ansatz.

Die konvektiven Flüsse werden dabei basierend auf dem MUSCL-Extrapolationsansatz mit $\kappa = 1/3$ und der Genauigkeit zweiter Ordnung diskretisiert [39].

Zur Bestimmung des numerischen Flusses wird ein konstanter Blending-Faktor von $\phi = 0,001$ für alle Simulationen verwendet, da sich dies als gängige Praxis bei der Anwendung von Großskalensimulationen in Verbindung mit TRACE herauskristallisierte. In diesem Zusammenhang würde ein Blending-Faktor von $\phi = 1$ zum Upwind-Verfahren nach Roe [30] und $\phi = 0$ zur Verwendung von ausschließlich zentralen Flüssen führen. Die viskosen Flüsse werden mittels zentraler Differenzen mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung approximiert.

Da instationäre Rechnungen genaue und robuste Zeitbereichsintegrationsschemata verlangen, wird im Rahmen dieser Arbeit das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit einer Genauigkeit dritter Ordnung verwendet.

Die beiden in Kapitel 2.3.3.3 vorgestellten Feinstrukturmodelle sind ebenfalls bereits in TRACE integriert und werden im Folgenden bei der angewandten LES verwendet.

4.2 Randbedingungen für den STG

In diesem Abschnitt sollen die Randbedingungen aufgezeigt werden, welche für die Verwendung des synthetischen Turbulenzgenerators und die damit verbundene korrekte Berechnung der Geschwindigkeitsfluktuationen nötig sind.

Für die Bestimmung der Wellenlänge l_e (siehe Gleichung 3.11) wird die Vorgabe eines integralen turbulenten Längenmaßes L_T benötigt. Zu diesem Zweck besteht zusätzlich die Möglichkeit dieses turbulente Längenmaß räumlich aufgelöst, also nicht konstant über den Strömungsquerschnitt vorzugeben, wie dies beispielsweise bei der Simulation einer Kanalströmung (siehe Kapitel 5.2) sinnvoll ist, um das zu erwartende charakteristische Strömungsbild innerhalb einer turbulenten Grenzschicht zu erhalten.

Weitere notwendige Größen für das STG-Setup sind die geometrieabhängigen Größen

- kleinster Wandabstand ausgehend vom jeweiligen Zellzentrum
und
- Gitterschrittweite in den drei Raumrichtungen.

Diese Größen variieren mit der Diskretisierung des Rechengebiets und sind von entscheidender Bedeutung für das Zustandekommen eines turbulenten Strömungsfelds. Für die Bildung des Tensors A aus Gleichung 3.3 ist die Vorgabe des Reynoldsspannungstensors nötig. Prinzipiell ist es hierbei ebenfalls möglich die Reynoldsspannungen räumlich konstant oder räumlich aufgelöst vorzuschreiben.

Geht man allerdings von einer isotropen Strömung (Definition siehe Kapitel 2.2) aus, lassen sich die Reynoldsspannungen auch indirekt durch eine Vorgabe des Turbulenzgrads und des Geschwindigkeitsvektors bestimmen. Dazu wird zunächst gemäß Gleichung 2.31 die turbulente kinetische Energie bestimmt, um anschließend den Reynoldsspannungstensor über

$$\widetilde{u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4.1)$$

berechnen zu können.

Außerdem werden die Reynoldsspannungen und das integrale turbulente Längenmaß verwendet, um die Kolmogorov-Länge l_η , die zur Wellenzahl $k_\eta = 2\pi/l_\eta$ gehört, gemäß

$$l_\eta = \left(\frac{\nu^3 L_T}{k^{3/2}} \right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3 L_T}{\left[\frac{1}{2} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \right]^{3/2}} \right)^{1/4} \quad (4.2)$$

zu bestimmen. Damit wird schließlich die Dämpfungsfunktion f_η aus Gleichung 3.8 berechnet.

Zur vollständigen Beschreibung des Strömungsfelds unter Verwendung des synthetischen Turbulenzgenerators muss außerdem das Geschwindigkeitsfeld und die Dichte als Eintrittsrandbedingung bekannt sein. Der Scheinpositionsvektor \mathbf{r}' (siehe Gleichung 3.5) wird mithilfe einer makroskopischen Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung, die sich beispielsweise aus diesem vorgeschriebenen Geschwindigkeitsfeld berechnen lässt, gebildet.

4.3 Methoden zum Einbringen der synthetischen Turbulenz

Um die synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen in das Strömungsfeld einzubringen, werden im Rahmen dieser Arbeit eine Eintrittsrand- und eine Quelltermformulierung untersucht, die im Weiteren vorgestellt werden.

4.3.1 Eintrittsrandformulierung

Bei der Eintrittsrandformulierung werden die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen aus Gleichung 3.2 in der jeweiligen Raumrichtung mit den mittleren Strömungsgeschwindigkeitskomponenten durch eine Addition gemäß 3.1 überlagert. Da dies auf der Eintrittsfläche in das zu betrachtende Rechengebiet geschieht, liegen dadurch direkte Randbedingungen für die Simulation vor.

4.3.2 Quelltermformulierung

Das Einbringen der synthetischen Turbulenz kann durch die Quelltermformulierung an einer beliebigen Position im Strömungsfeld realisiert werden. Das hat den Vorteil, dass gewährleistet ist, dass die Turbulenz in einem Bereich in das Strömungsfeld eingebracht wird, in dem die Gitterauflösung ausreichend fein ist. Bei der Anwendung einer Großskalensimulation mit der Verwendung der Gitterschrittweite als Filter führt dies wiederum dazu, dass kleinskalige Turbulenzstrukturen nicht herausgedämpft werden.

Diese Eigenschaft ist beispielsweise bei der Umströmung von Körpern vorteilhaft, da das Rechnetz auf diese Weise nicht im gesamten Rechengebiet hinreichend fein aufgelöst sein muss. Bei der numerischen Simulation mittels einer Quelltermformulierung erhält man so die gewünschte Flexibilität und umgeht die typischen Probleme bei langen und grob aufgelösten Einströmgebieten.

Die in dieser Arbeit verwendete Quelltermformulierung basiert auf dem Konzept von Schmidt und Breuer [34] welches das Einbringen eines zusätzlichen Quellterms in der Impulsgleichung vorsieht. Wird ein zusätzlicher Quellterm S_{syn,u_i} in die ursprüngliche integrale Form der Impulserhaltungsgleichung

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{\Gamma}_{\text{konvektive + diffusive Flüsse}} = \underbrace{\int_V S_{u_i} dV}_{\text{Quellterm}} \quad (4.3)$$

eingebbracht, führt dies zu einem geänderten Strömungsfeld, das nun mit u_i^* bezeichnet wird:

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_i^*)}{\partial t} dV + \Gamma = \int_V S_{u_i} dV + \int_V S_{syn,u_i} dV \quad (4.4)$$

Dabei wird jedoch implizit die Annahme getroffen, dass sich die konvektiven und diffusiven Flüsse sowie der ursprüngliche Quellterm der Gleichung 4.3 durch die Einführung eines neuen Quellterms nicht ändern. Durch eine Subtraktion der beiden Gleichung 4.3 und 4.4 erhält man einen Zusammenhang für den zusätzlichen Quellterm:

$$\int_V S_{syn,u_i} dV = \int_V \frac{\partial(\rho u_i^*)}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial[\rho u_{syn,i}'']}{\partial t} dV \quad (4.5)$$

In Kombination mit dem STG nach Shur et al. [36] steht $u_{syn,i}''$ für die synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen nach Gleichung 3.2 in der jeweiligen Koordinatenrichtung.

Um einer Relaminarisierung des Strömungsfelds vorzubeugen wird die zeitliche Ableitung in Gleichung 4.5 durch das integrale Zeitmaß T_T ersetzt:

$$\int_V S_{syn,u_i} dV = \int_V \frac{[\rho u_{syn,i}'']}{T_T} dV \quad (4.6)$$

Das integrale Zeitmaß kann dabei als eine Art Relaxationszeit interpretiert werden, die angibt, wie lange es dauert bis das System auf eine eingebrachte Störung reagiert. Dementsprechend sollte der Zeitschritt der Rechnung wesentlich kleiner als das integrale Zeitmaß gewählt werden ($\Delta t \ll T_T$), da ansonsten mit einer sehr schnellen, starken Antwort des Systems gerechnet werden muss.

Um Diskontinuitäten in den Erhaltungsgleichungen zu verhindern und eine schnelle räumliche Entwicklung der turbulenten Strömung zu forcieren, wird die Amplitude des zusätzlichen Quellterms innerhalb eines vordefinierten Einflussgebiets mit einer Gauß-Verteilung entsprechend dem Abstand d vom Quelltermzentrum x_{QT} und unter Miteinbeziehung des integralen Längenmaßes L_T skaliert:

$$S_{syn,u_i}^{CFD}(x) = \underbrace{S_{syn,u_i}}_G \cdot \exp\left(-\frac{\pi d^2}{2L_T^2}\right) \quad (4.7)$$

Dieses Verhalten ist schematisch in Abbildung 4.1 illustriert.

Zu einem Zeitschritt wird S_{syn,u_i} an nur einer x -Position x_{QT} (grüne Linie) bestimmt, anschließend gemäß der Exponentialfunktion G skaliert und entlang des Einflussgebiets in x -Richtung verteilt. Somit ist eine Variation von S_{syn,u_i} lediglich in y - und/oder z -Richtung möglich.

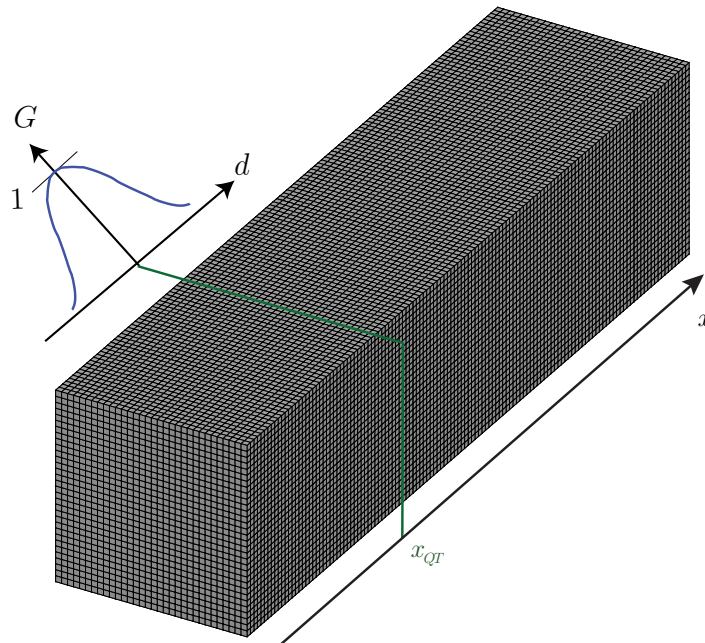


Abbildung 4.1: Prinzipskizze der Wirkweise der Quelltermformulierung

Basierend auf der Taylor-Hypothese für $\tilde{u}_i \gg u_i''$, die besagt, dass man die turbulenten Strukturen für kurze Zeit als eingefroren betrachten darf, wird das integrale Längenmaß mithilfe der an dieser Stelle charakteristischen Geschwindigkeit u_x in das integrale Zeitmaß folgendermaßen umgerechnet:

$$L_T = u_x \cdot T_T \tag{4.8}$$

5 Simulation

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln ein umfassender Einblick in die theoretischen Grundlagen gegeben wurde, sollen nun die beiden verwendeten Testfälle erläutert werden. Im Anschluss werden die erzielten Simulationsergebnisse ausgewertet und der synthetische Turbulenzgenerator sowie die jeweilige Formulierung hinsichtlich der korrekten Wiedergabe der turbulenten Strukturen analysiert.

5.1 Räumlich zerfallende Turbulenz

5.1.1 Beschreibung

Um die Qualität des verwendeten synthetischen Turbulenzgenerators in Verbindung mit dem skalenauflösenden Simulationsverfahren beurteilen zu können, wird zunächst eine räumlich zerfallende Turbulenz betrachtet. Dabei werden die turbulenten Strukturen auf das Strömungsfeld aufgeprägt und das räumliche Verhalten, in diesem Fall der gewünschte turbulente Zerfall gemäß des in Kapitel 2.2 beschriebenen Kaskadenprozesses, simuliert. Der räumliche Zerfall der turbulenten Wirbelstrukturen ist hierbei zu erwarten, da das betrachtete Raumsegment periodische Ränder in jeder der beiden Richtungen orthogonal zur Hauptströmungsrichtung besitzt, also jeglicher Einfluss von viskoser Wandreibung unberücksichtigt bleibt. Aufgrund dessen bildet sich in diesem Fall keine Wandgrenzschicht aus und es kommt im Inneren des Raumsegments zu keiner weiteren Turbulenzproduktion, die per Definition proportional zu den vorhandenen Geschwindigkeitsgradienten in der Strömung ist. Des Weiteren ist als direkte Konsequenz aus den beschriebenen Bedingungen von einer isotropen, homogenen Turbulenz auszugehen.

5.1.2 Setup

Für die Erzeugung der turbulenten Strukturen werden zunächst die Reynoldsspannungen und das turbulente Längenmaß benötigt. Wie bereits erläutert, wird für diesen Fall eine isotrope, homogene Turbulenz erwartet, sodass sich die für den synthetischen Turbulenzgenerator notwendigen Reynoldsspannungen aus der Vorgabe des Turbulenzgrads und der Geschwindigkeitskomponenten berechnen lassen. Das turbulente Längenmaß wird als eine konstante Eingangsgröße über den Strömungsquerschnitt vorgeschrieben. Am Eintritt in das Rechengebiet wird dem Löser die aus Tabelle 5.1 abgeleitete Hauptströmungsgeschwindigkeit vorgegeben, die außerdem als makroskopische Geschwindigkeit für den STG dient (siehe Gleichung 3.5). Die für die Geschwindigkeitsberechnung notwendige Schallgeschwindigkeit wird dabei über die Annahme eines idealen Gases zu $a = \sqrt{\gamma RT}$ bestimmt. Des Weiteren wird die Hauptströmungsgeschwindigkeit unter der berechtigten Annahme, dass die Querströmungskomponenten vernachlässigbar sind ($u_y = u_z = 0$), berechnet.

Tabelle 5.1: Vorgabeparameter bei der räumlich zerfallenden Turbulenz

Machzahl	Ma	0,1
Temperatur	T	300 K
spezifische Gaskonstante	R	287,06 J/(kg K)
Isentropenexponent	γ	1,4
Turbulenzgrad	Tu_0	0,1
turbulentes Längenmaß	L_T	0,001 m

Anzumerken ist dabei, dass die Machzahl sehr klein gewählt wurde, damit trotz der Verwendung des dichteasierten, kompressiblen Löfers TRACE ein möglicher Kompressibilitätseinfluss auf die Simulationsergebnisse vermieden wird.

Aufgrund der nicht periodischen räumlichen Definition des synthetischen Turbulenzgenerators (siehe Kapitel 3.2) kommt es zu einer Verletzung der Kontinuitätsgleichung an den periodischen Rändern des Rechengebiets. Nach Morsbach und Franke [23] müssen die y - und z -Komponenten des zufälligen Wellenzahlvektors $k^n d^n$ Vielfache der minimalen Wellenzahl sein, sodass die Kontinuitätsgleichung dort wieder erfüllt ist. In dieser Arbeit soll diesem Problem an den periodischen Rändern mit einer Querschnittsvergrößerung entgegnet werden. Die Idee dahinter ist, dass das vorgeschrie-

bene turbulente Längenmaß konstant gehalten wird und die Eintrittsfläche derart vergrößert wird, dass sich die zu erwartenden homogene Verteilung der Reynoldsspannungen über dem Querschnitt ausbildet. Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, wird eine Variation eines Faktors n , mit $n = \{1,2,3\}$, durchgeführt. Die Abmessungen sowie die räumliche Diskretisierung des Rechengebiets sind in Abhängigkeit des vorgeschriebenen turbulenten Längenmaßes L_T und des Faktors n der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 5.2: Abmessungen und Diskretisierung des Raumsegments

Abmessung in Strömungsrichtung	L_x	[m]	$8\pi L_T$
Abmessungen quer zur Strömungsrichtung	$L_y = L_z$	[m]	$2\pi n L_T$
Zellenanzahl in Strömungsrichtung	N_x	[–]	128
Zellenanzahl quer zur Strömungsrichtung	$N_y = N_z$	[–]	$32n$
Gesamtzellenanzahl	N	[–]	$131\,072n^2$

Unter Vorgabe der Reynoldszahl von $Re = 7000$ kann mithilfe des Sutherland-Modells für die dynamische Viskosität

$$\eta = \eta_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.1)$$

für Luft mit: $\eta_0 = 1,7198 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$, $T_0 = 273 \text{ K}$ und $C = 110 \text{ K}$

die Dichte für das korrekte Strömungsfeld am Eintritt (siehe Kapitel 4.2) gemäß

$$\rho = Re \frac{\eta}{u L_T} \quad (5.2)$$

bestimmt werden.

Der zugehörige statische Druck, welcher als Randbedingung am Austritt aus dem Rechengebiet verwendet wird, berechnet sich anschließend über die ideale Gasgleichung. Die auf Basis von Tabelle 5.1 bestimmten Werte sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Dabei wird in der Spalte *Verwendung* die Zugehörigkeit der jeweiligen Größe dargestellt:

- STG: die Größe wird im synthetischen Turbulenzgenerator verwendet
- Initialisierung: die Größe dient zur Initialisierung des gesamten Strömungsfelds
- Eintritt / Austritt: die Größe wird dem Löser als Randbedingung an der jeweiligen Position übergeben

Tabelle 5.3: Eingangsgrößen für die räumlich zerfallende Turbulenz

		Verwendung	Wert
Geschwindigkeit	$u_0 := u_{x_0}$	STG / Eintritt / Initialisierung	34,72 m/s
Geschwindigkeiten	$u_{y_0} = u_{z_0}$	STG / Eintritt / Initialisierung	0 m/s
Dichte	ρ_0	Eintritt / Initialisierung	3,731 kg/m ³
statischer Druck	p_0	Initialisierung / Austritt	321300,8 Pa

Der Reynoldsspannungstensor, welcher für den STG vorzugeben ist, bestimmt sich mithilfe der Annahme einer isotropen Turbulenz zu:

$$\left(\widetilde{u''_i u''_j}\right)_0 = \begin{pmatrix} 12,06 & 0 & 0 \\ 0 & 12,06 & 0 \\ 0 & 0 & 12,06 \end{pmatrix} \text{m}^2/\text{s}^2 \quad (5.3)$$

In Abbildung 5.1 ist das Netz des Rechengebiets dargestellt, dass aufgrund der einfachen Geometrie ausschließlich aus rechtwinkligen, identischen Hexaedern besteht.

Da es bei diesem Testfall keine Wände, sondern lediglich periodische Ränder gibt, ist der für den STG notwendige Wandabstand d_w auf einen sehr großen Wert festgelegt, sodass gewährleistet ist, dass der Wandabstand bei der Ermittlung des jeweiligen Längenmaßes nach den Gleichungen 3.10 und 3.11 keine Berücksichtigung findet.

Weiterhin sei noch erwähnt, dass der zusätzliche synthetische Quellterm für die Quelltermformulierung an der Position $x_{QT} = \frac{1}{16}L_x = 0,00157\text{m}$ in das Strömungsfeld eingebracht wird. Das dafür notwendige integrale Zeitmaß in Gleichung 4.6 wird unter Verwendung der Hauptströmungskomponente u_{x_0} (siehe Tabelle 5.3) zu $T = 2,88 \cdot 10^{-5}\text{s}$ bestimmt.

Ein axiales Durchströmen des Segments wird mit 2304 Zeitschritten aufgelöst. Nach der doppelten Zeit, also nach 4608 simulierten Zeitschritten, beginnt die Mittelung der Strömungsvariablen. Im Rahmen dieses Testfalles werden schließlich Rechnungen mit 50.000 und 500.000 Gesamtzeitschritten, entsprechend ca. 22 bzw 220 Durchströmvorgängen, durchgeführt. Das verwendete Feinstrukturmodell für die LES ist das Smagorinsky-Modell mit einer Modellkonstanten $C_s = 0,17$ zur Berechnung der charakteristischen Länge l_{FS} (siehe Gleichung 2.60).

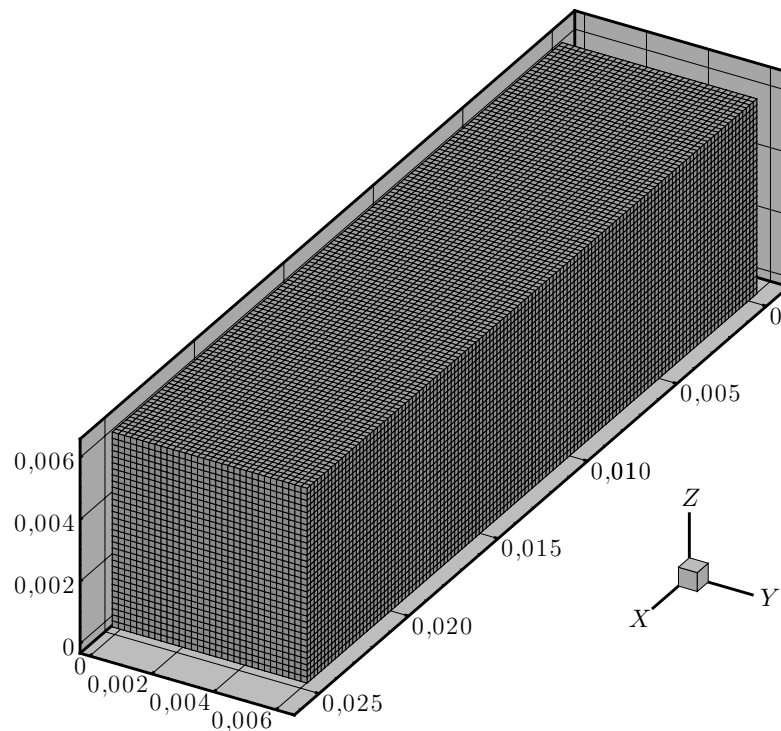


Abbildung 5.1: Hexaedernetz des betrachteten Raumsegments in der Grundkonfiguration mit $n = 1$, Abmessungen in Meter

5.1.3 Auswertung und Ergebnisse

Ziel der Auswertung ist es zunächst anhand der Simulationen mit 50.000 Gesamtzeitschritten die Funktionsfähigkeit des synthetischen Turbulenzgenerators zu analysieren. Weiterhin sollen die Eintrittsformulierung und die Quelltermformulierung (siehe Kapitel 4.3) verglichen werden, um anhand dieses einfachen generischen Testfalls Unterschiede im Verhalten zu bestimmen.

Um zunächst einen visuellen Eindruck der existenten Wirbelstrukturen und dem räumlich turbulenten Zerfall zu erhalten, wird in den folgenden Abbildungen 5.2 und 5.3 das λ_2 -Kriterium verwendet [15]. Die x -Komponente der Rotation des Geschwindigkeitsvektors liefert in diesem Zusammenhang einen Indiz über die tatsächlich vorherrschende Wirbelstärke ω_x . Die unterschiedliche Wirkweise der beiden verwendeten Formulierungen wird in Abbildung 5.3 besonders deutlich, sodass relevante Wirbelstrukturen erst stromab der Quelltermposition vorhanden sind. Demgegenüber zerfallen die Wirbelstrukturen bei der Eintrittsrandformulierung bereits ausgehend von $x/L_x = 0$.

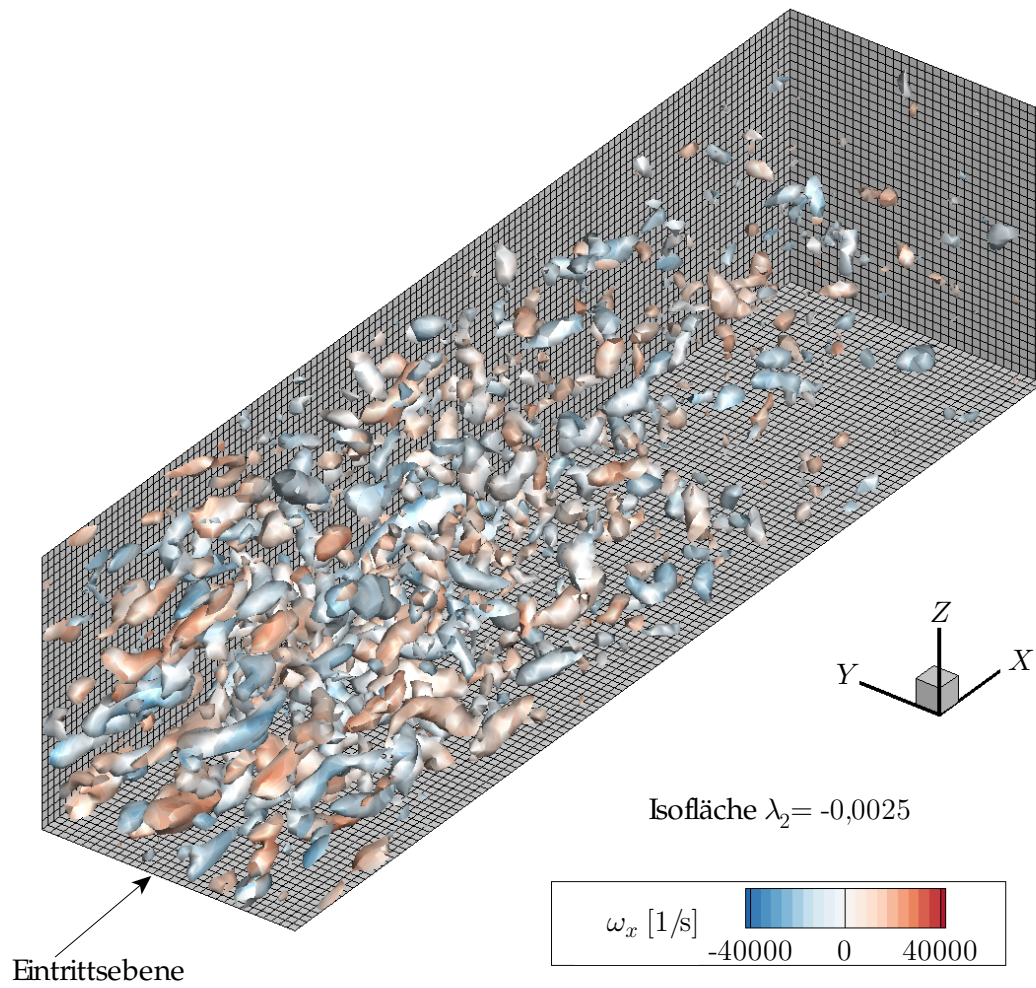
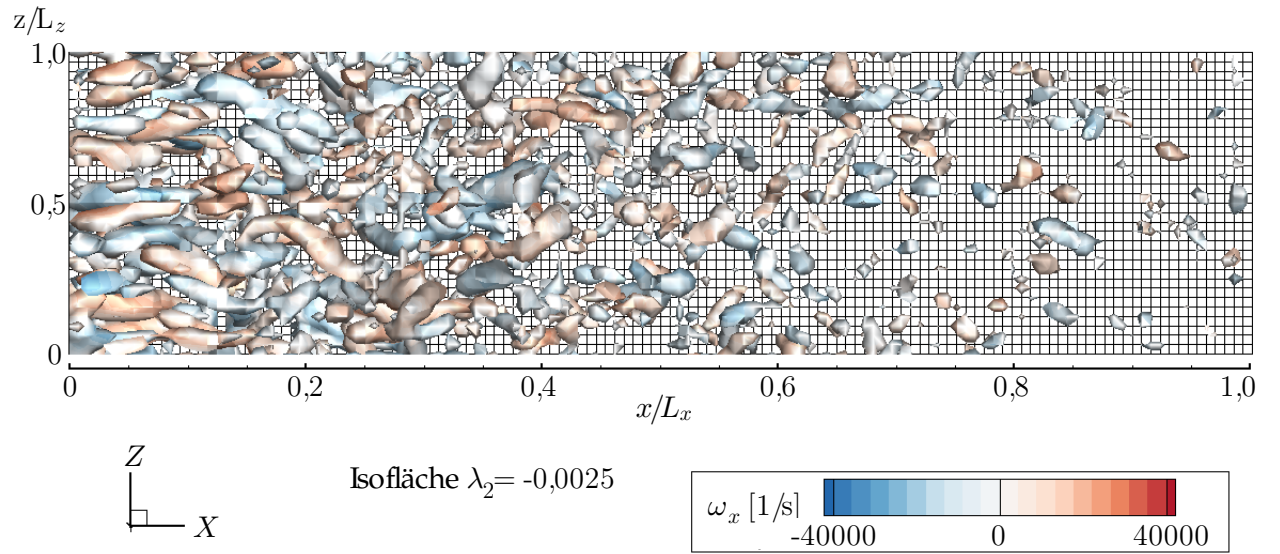
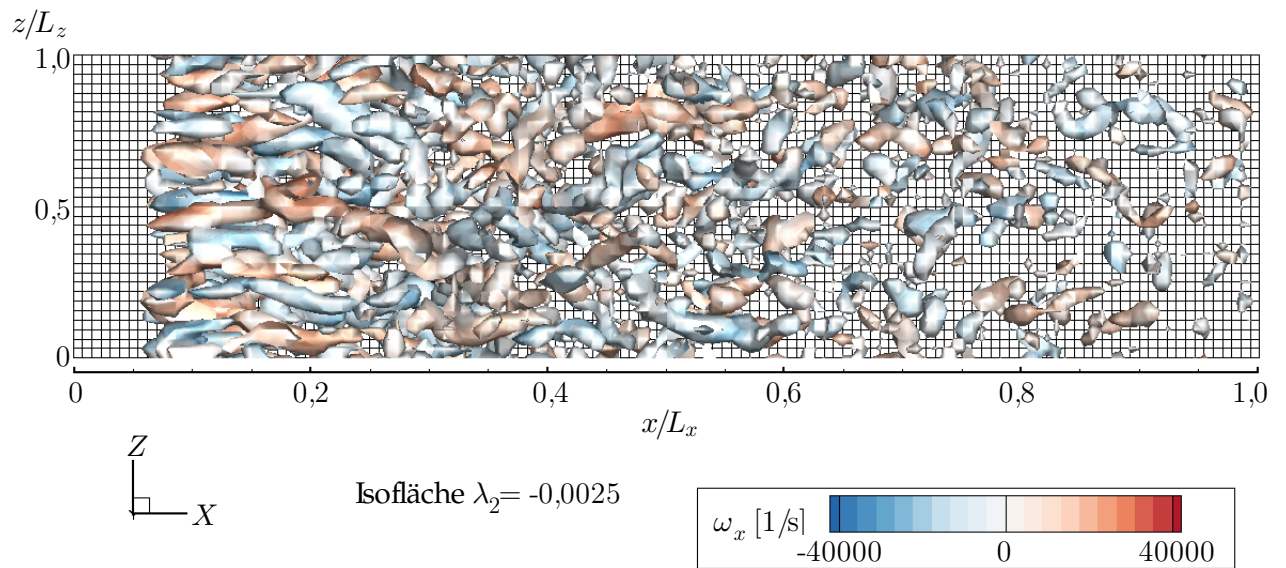


Abbildung 5.2: Wirbelstrukturen im Raumsegment bei der Eintrittsformulierung



(a) Eintrittsformulierung



(b) Quelltermformulierung

Abbildung 5.3: Räumliche Entwicklung der Wirbelstrukturen in der XZ -Ebene

Um den verwendeten STG zu validieren, ist es sinnvoll zu überprüfen, ob die gewünschte turbulente kinetische Energie, welche durch Vorgabe des Turbulenzgrads und der Machzahl (siehe Tabelle 5.1) festgelegt ist, korrekt auf die Strömung übertragen wird. Dementsprechend sind hierfür in der Abbildung 5.4 die Verläufe des dimensionslosen Turbulenzgrads skaliert mit Tu_0 aus Tabelle 5.1 über der Länge des

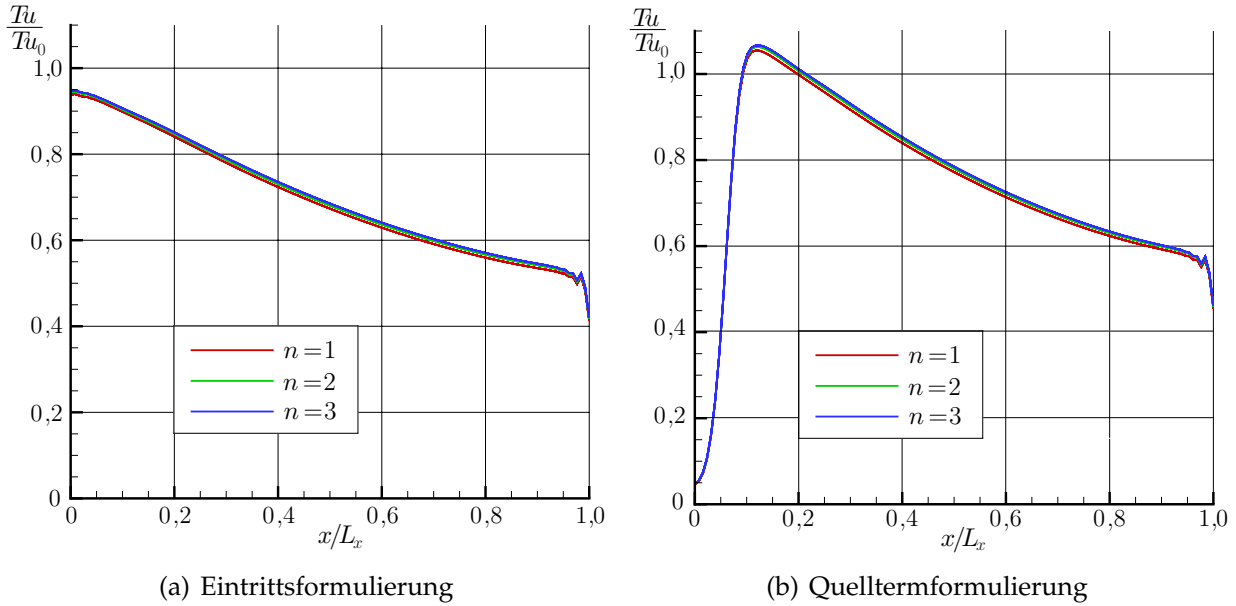


Abbildung 5.4: Turbulenzgrad bezogen auf den Vorgabewert über der Kanallänge

Raumsegments aufgetragen. Die linke Abbildung 5.4(a) zeigt den zu erwartenden charakteristischen Turbulenzabbau bei der Eintrittsformulierung entlang der Lauflänge ausgehend von einem Anfangswert $Tu/Tu_0(x/L_x = 0) \approx 0,94$, wohingegen für die Quelltermformulierung in der rechten Abbildung 5.4(b) zunächst ein Anstieg des Turbulenzgrads, gefolgt von einem ähnlichen Abfall, zu sehen ist. Zunächst stellt man fest, dass der vorgeschriebene Turbulenzgrad von $Tu_0 = 0,1$ im Rahmen geringer Abweichungen bei beiden Formulierungen reproduziert wird und demnach ein Anzeichen dafür vorliegt, dass der verwendete STG die gewünschte turbulente kinetische Energie produziert und diese korrekt in die Strömung einbringt. Der maximale Wert bei der Quelltermformulierung liegt bei circa $Tu/Tu_0(x/L_x \approx 0,13) = 1,06$ und ist demnach 13% größer als der Maximalwert bei der Eintrittsformulierung, sodass folglich durch die Verwendung eines Quellterms etwas mehr Energie in die Strömung gebracht wird. Betrachtet man Abbildung 5.5, in welcher der Verlauf der Exponentialfunktion G gemäß dem Ansatz nach Gauß (siehe Gleichung 4.7) dargestellt ist, wird klar, dass nach $x/L_x \approx 0,13$ kein nennenswerter Eintrag des Quellterms mehr vorhanden ist und die turbulente kinetische Energie bzw. der Turbulenzgrad an dieser Position das Maximum erreicht haben muss. Das steile Anwachsen des Turbulenzgrads stromauf dieses Punkts ist durch die verwendete Formulierung des synthetischen Quellterms und dem damit verbundenen Einflussgebiet um die Quelltermposition bedingt.

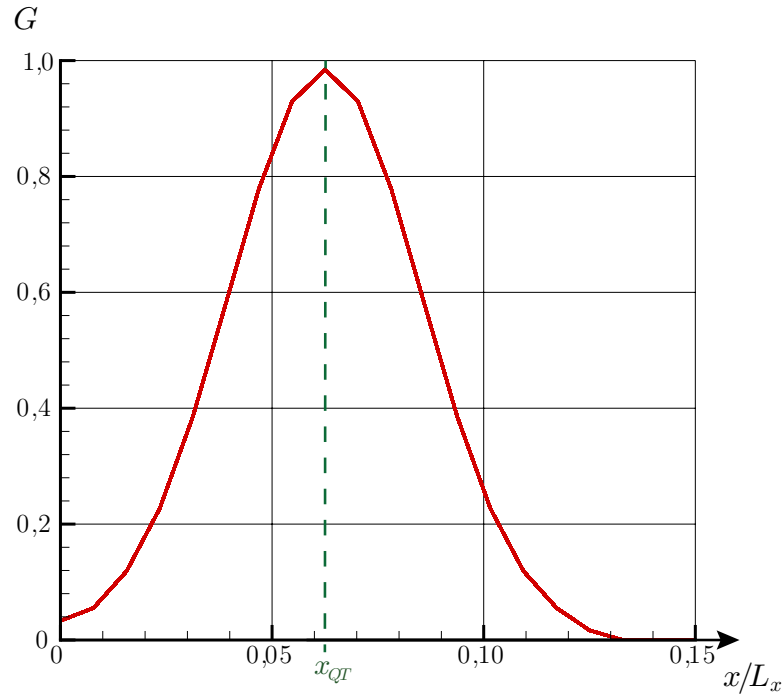
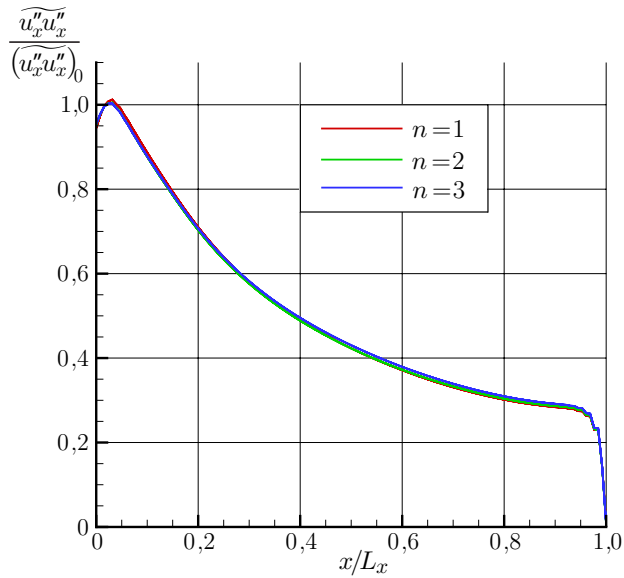
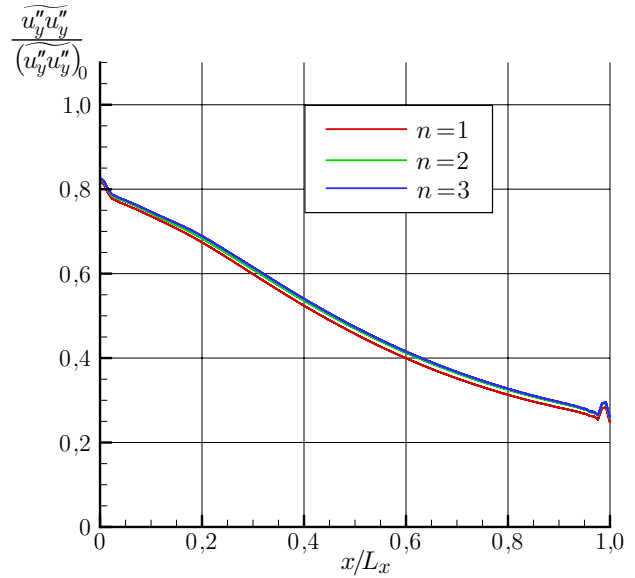


Abbildung 5.5: Exponentialfunktion G in Abhängigkeit der Lauflänge

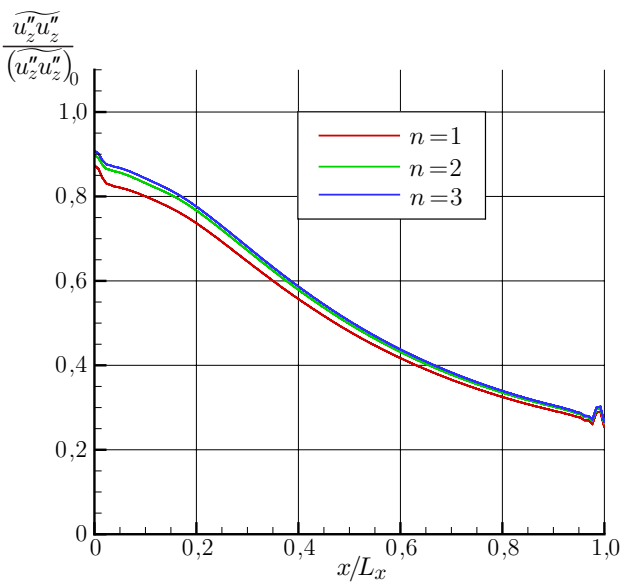
In den Abbildungen 5.6 und 5.7 sind die Normalspannungskomponenten des Reynoldsspannungstensors der drei Querschnittsvariationen sowie die Scherspannungen der Grundkonfiguration mit $n = 1$ entlang der Lauflänge dargestellt. Zu einer besseren Übersichtlichkeit werden die Spannungen allerdings dimensionslos betrachtet. Zur Bildung der dimensionslosen Kennzahlen wurden die Spannungskomponenten mit den für den STG vorgegebenen Reynoldsspannungen $\left(\widetilde{u''_i u''_i}\right)_0$ aus Gleichung 5.3 skaliert. Ausgehend von dieser Analyse soll überprüft werden, ob der STG im Testfall mit den periodischen Rändern qualitativ gut die erwartete isotrope Strömung abbildet. Die aus der Abbildung 5.4 erlangten Erkenntnisse lassen sich zunächst auch in den Reynoldsspannungen wiederfinden, indem die Eintrittsrandformulierung in Abbildung 5.6 zu geringeren Normalspannungskomponenten führt als die Quelltermformulierung in Abbildung 5.7. Vergleicht man dazu das Mittel aus den Maximalwerten der Normalspannungskomponenten mit den vorgeschriebenen Werten aus Gleichung 5.3 sind nahezu identische Verhältnisse wie bei einem Vergleich der maximalen Turbulenzgrade festzustellen. Ebenso wie in der Abbildung 5.4 ist auch hier ersichtlich, dass es aufgrund einer Querschnittsvergrößerung zu marginal höheren Spannungen und damit zu einer höheren turbulenten kinetischen Energie kommt.



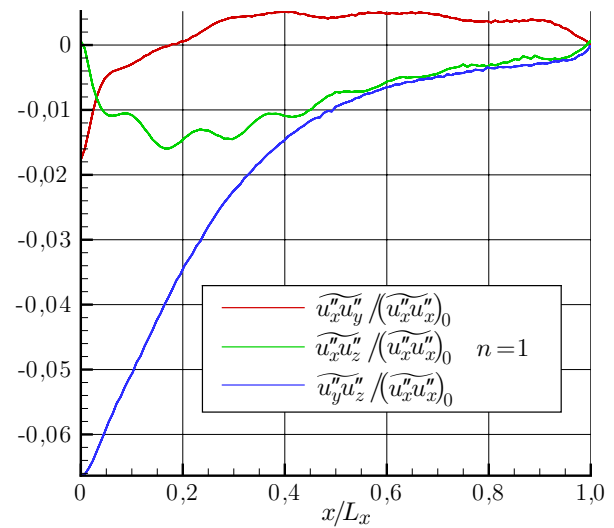
(a) Normalspannungskomponente $\frac{\widetilde{u''_x u''_x}}{(\widetilde{u''_x u''_x})_0}$



(b) Normalspannungskomponente $\frac{\widetilde{u''_y u''_y}}{(\widetilde{u''_y u''_y})_0}$

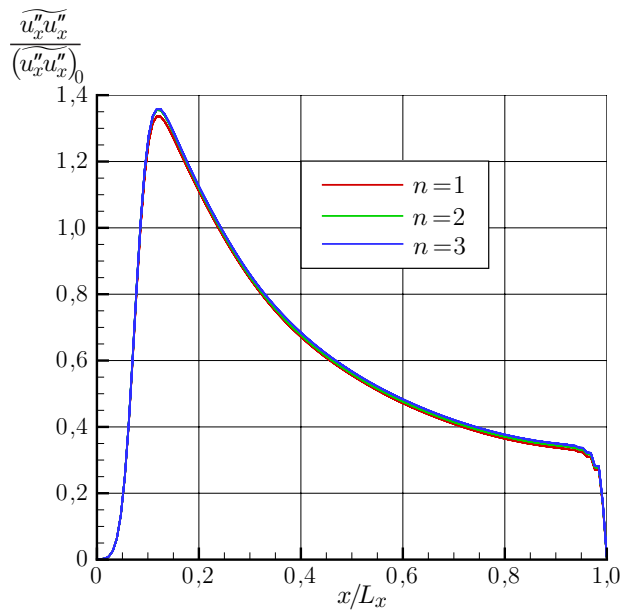
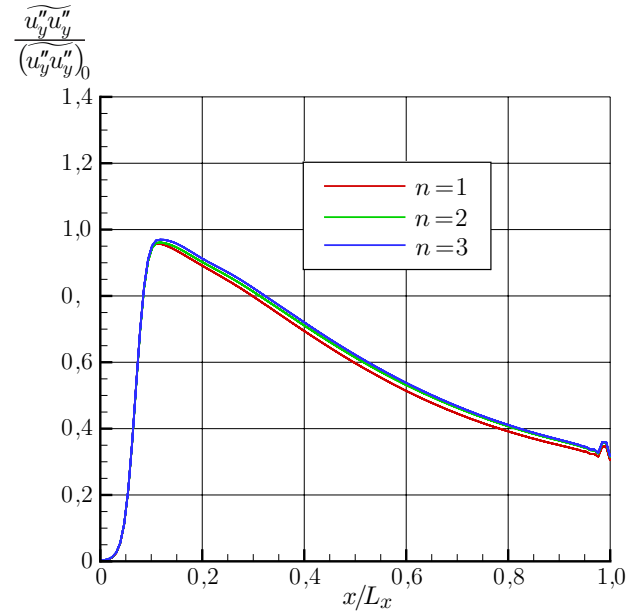
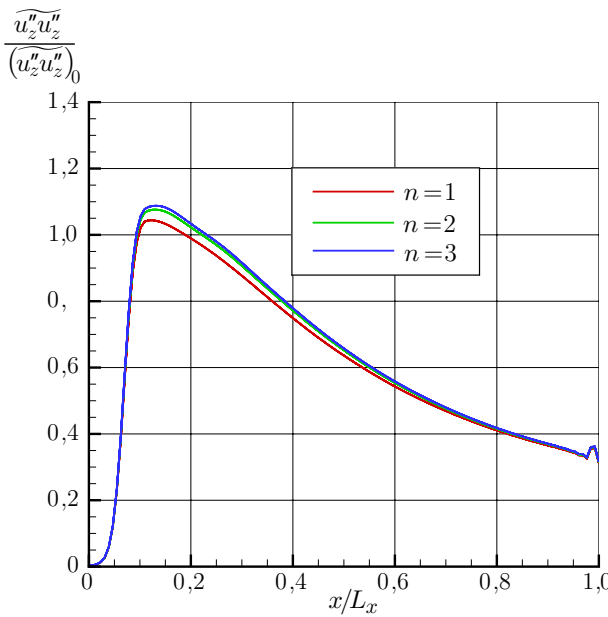
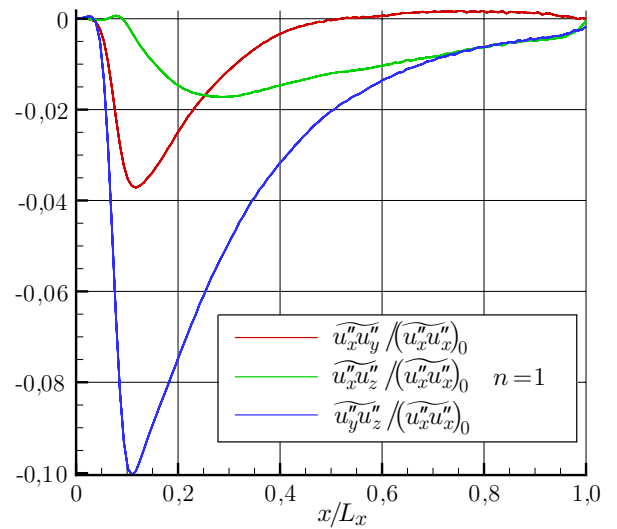


(c) Normalspannungskomponente $\frac{\widetilde{u''_z u''_z}}{(\widetilde{u''_z u''_z})_0}$



(d) Scherspannungen

Abbildung 5.6: Reynoldsspannungen bezogen auf die Vorgabewerte über der Lauflänge bei der Eintrittsformulierung


 (a) Normalspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_x} / (\widetilde{u''_x u''_x})_0$

 (b) Normalspannungskomponente $\widetilde{u''_y u''_y} / (\widetilde{u''_y u''_y})_0$

 (c) Normalspannungskomponente $\widetilde{u''_z u''_z} / (\widetilde{u''_z u''_z})_0$


(d) Scherspannungen

Abbildung 5.7: Reynoldsspannungen bezogen auf die Vorgabewerte über der Lauflänge bei der Quelltermformulierung

Es muss allerdings festgehalten werden, dass der STG keine perfekte isotrope Turbulenz reproduziert, da sich die drei Normalspannungskomponenten des Reynoldsspannungstensors zu sehr unterscheiden.

Hierzu ist es sinnvoll die Abweichung der beiden Hauptspannungskomponenten bezüglich $\widetilde{u''_x u''_x}$ gemäß

$$\Delta \widetilde{u''_i u''_i} = \frac{\widetilde{u''_i u''_i} - \widetilde{u''_x u''_x}}{\widetilde{u''_x u''_x}} \quad (5.4)$$

zu bestimmen.

Lässt man die sehr große Abweichung am Raumsegmentaustritt sowie die unterschiedlichen Anstiege stromauf der Quelltermposition bei der Quelltermformulierung außen vor, stellt man fest, dass die Maximalwerte dieser Differenzen im Bereich von 13 – 29% liegen. Die maximalen Abweichungen sind dabei immer in der Nähe der x -Position, an der die Normalspannungskomponente in Strömungsrichtung ihr Maximum erreicht, zu finden. Diese maximalen Abweichungen sind in den nachfolgenden Tabellen 5.4 und 5.5 für Eintrittsformulierung (ET) und Quelltermformulierung (QT) zusammengefasst.

Tabelle 5.4: Auswertung der maximalen Differenzen von $\Delta \widetilde{u''_y u''_y}$

Querschnittsvariation	Methode	$\left(\Delta \widetilde{u''_y u''_y}\right)_{max} [\%]$	x/L_x
$n = 1$	ET	23,6	0,03
	QT	28,5	0,12
$n = 2$	ET	22,3	0,03
	QT	29,1	0,12
$n = 3$	ET	21,9	0,03
	QT	28,6	0,12

Tabelle 5.5: Auswertung der maximalen Differenzen von $\Delta \widetilde{u''_z u''_z}$

Querschnittsvariation	Methode	$\left(\Delta \widetilde{u''_z u''_z}\right)_{max} [\%]$	x/L_x
$n = 1$	ET	18,2	0,03
	QT	21,9	0,12
$n = 2$	ET	14,1	0,03
	QT	20,8	0,12
$n = 3$	ET	13,0	0,03
	QT	20,2	0,12

Allerdings minimieren sich diese Differenzen aufgrund der fehlenden Geschwindigkeitsgradienten mit größer werdender Lauflänge wieder und die Strömung entwickelt sich zunehmend zu einer isotropen Strömung. Dieses Verhalten ist ebenso anhand der Scherspannungskomponenten in den Abbildungen 5.6(d) und 5.7(d) zu identifizieren. Die Scherspannungen, die bei einer perfekten isotropen Strömung verschwinden sollten, nähern sich dementsprechend mit größer werdendem x/L_x der Null an.

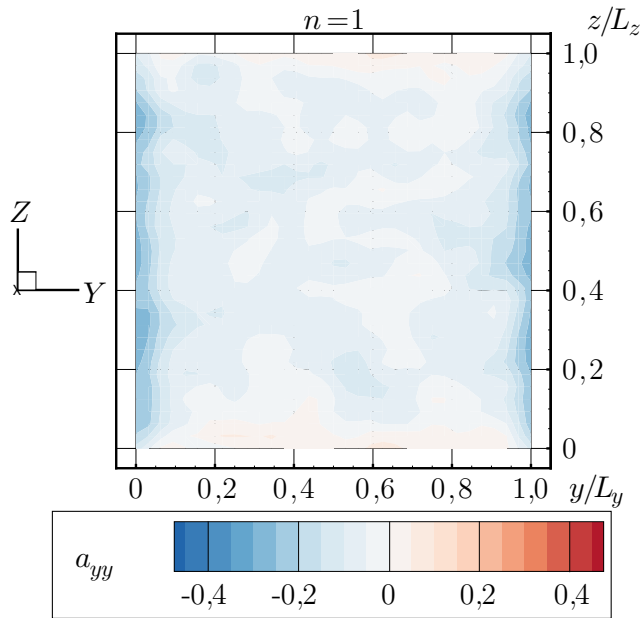
Das beschriebene und illustrierte Verhalten der Strömung führt direkt zum Sachverhalt, welcher in Kapitel 5.1.2 bereits angesprochen wurde. Aufgrund der nicht periodischen Definition des STG und der damit verbundenen Verletzung der Kontinuitätsgleichung kommt es direkt nach dem Einbringen der synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen zu signifikanten Unterschieden in den Hauptspannungskomponenten. In diesem Zusammenhang ist es vorteilhaft den Anisotropietensor, der die Abweichung des Reynoldsspannungstensors vom isotropen Zustand $\widetilde{u''_i u''_j} = 2/3k\delta_{ij}$ beschreibt, einzuführen:

$$a_{ij} = \frac{\widetilde{u''_i u''_j}}{k} - 2/3\delta_{ij} \quad (5.5)$$

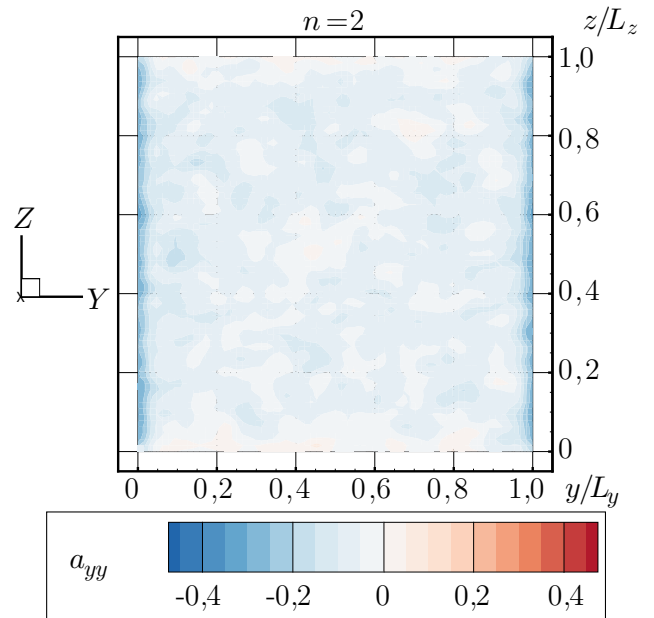
Wie in den Abbildungen 5.8 und 5.9 zu sehen ist, kommt es an den periodischen Rändern in y -Richtung zu einem Rückgang der a_{yy} -Komponente. Analog dazu sinken die Werte der a_{zz} -Komponente an den periodischen Rändern in z -Richtung ab, was hier aufgrund der Übersichtlichkeit allerdings nicht dargestellt ist. Dadurch jedoch lässt sich auch der Anstieg der a_{yy} -Komponente in diesem Bereich erklären. Eine Querschnittsvergrößerung führt sowohl bei der Eintrittsrand- als auch bei der Quelltermformulierung zu homogenen Reynoldsspannungen, was man in den Abbildungen 5.8 und 5.9 daran erkennen kann, dass die a_{yy} -Komponente des Anisotropietensors Werte nahe Null annimmt und der Abfall bzw. Anstieg an den periodischen Rändern größtenteils unterdrückt wird. Des Weiteren lässt sich durch diesen Sachverhalt die Erhöhung der eingebrachten turbulenten kinetischen Energie bei einer Querschnittsvergrößerung erklären (siehe dazu Abbildungen 5.4, 5.6 und 5.7). Dementsprechend führt eine Verringerung der dargestellten Randeffekte zu einer Steigerung der Wirksamkeit des STG. Trotz einer Verneunfachung des Querschnitts, variiert die turbulente kinetische Energie dennoch nur minimal.

Des Weiteren unterstützen die Verläufe der Anisotropiekomponenten auf der Hauptdiagonalen in den Abbildungen 5.8(d) und 5.9(d) die These, dass ab einer gewissen Lauflänge annähernd isotrope Strömungsbedingungen gelten, da sich alle Komponenten im Mittel dem Nullwert annähern.

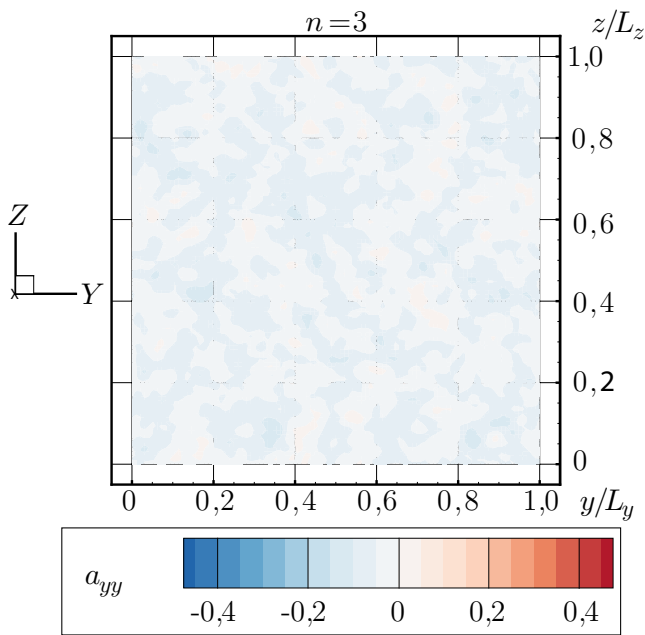
Das angestrebte Ziel, durch eine Querschnittsvergrößerung die Verletzung der Kontinuitätsgleichung an den periodischen Rändern abzumildern und somit eine homoge-



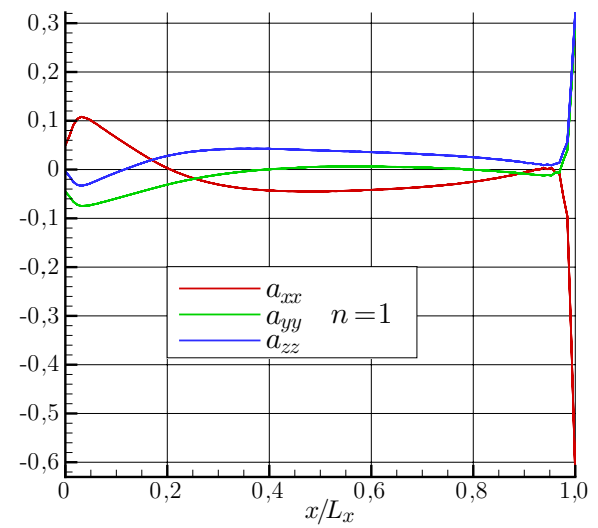
(a) a_{yy} für $n = 1$ bei $x = 0,001m \hat{=} x/L_x \approx 0,04$



(b) a_{yy} für $n = 2$ bei $x = 0,001m \hat{=} x/L_x \approx 0,04$



(c) a_{yy} für $n = 3$ bei $x = 0,001m \hat{=} x/L_x \approx 0,04$



(d) Anisotropiediagonalelemente für $n = 1$

Abbildung 5.8: Anisotropie der Eintrittsformulierung

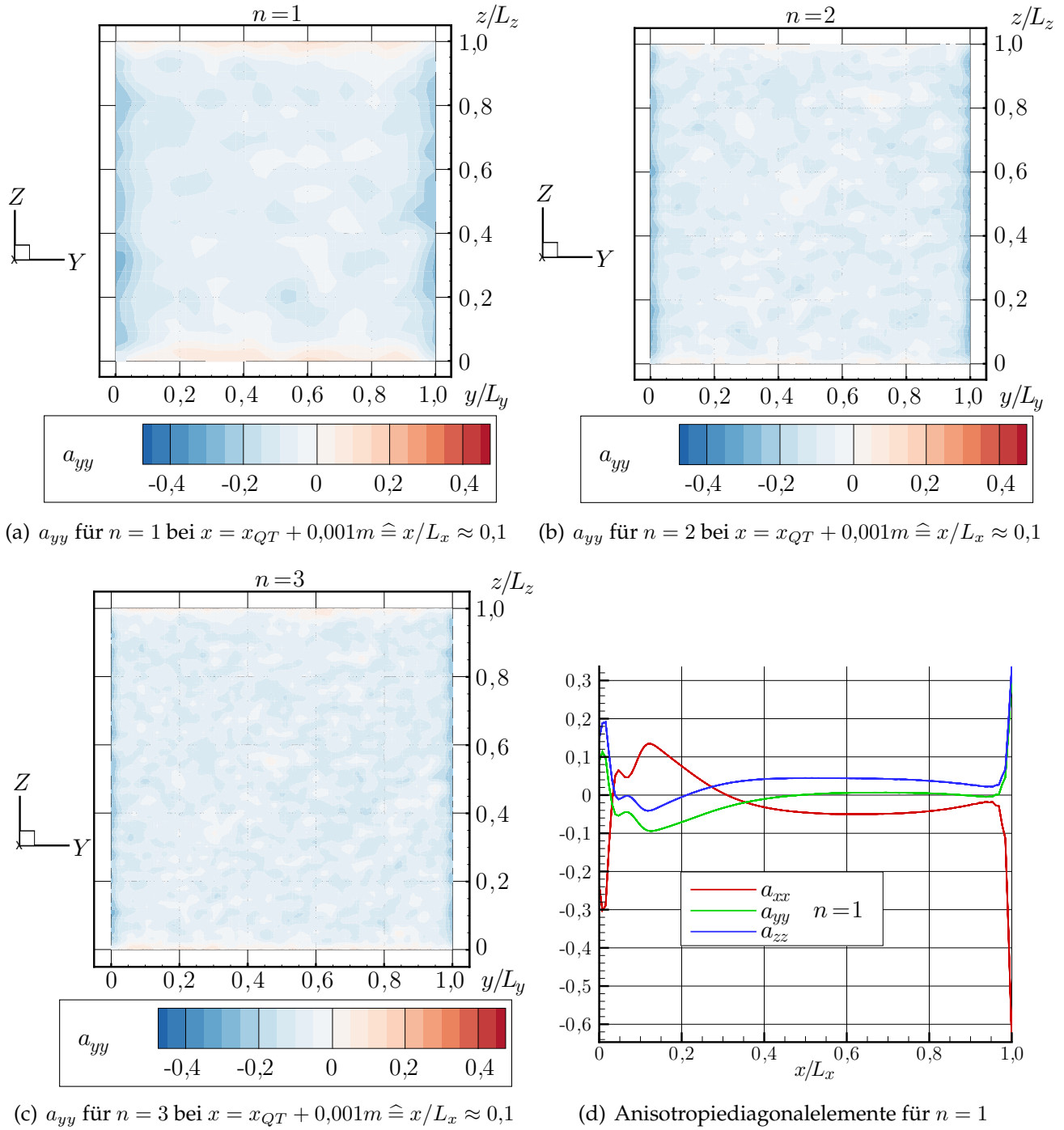


Abbildung 5.9: Anisotropie der Quelltermformulierung

neren Verteilung der Reynoldsspannungskomponenten in den betrachteten Querschnittsebenen herbeizuführen, wurde demzufolge erfüllt.

Dennoch kann dieses Vorgehen nicht verwendet werden, um eine möglichst isotrope Strömung abzubilden, da die Differenzen in den verschiedenen Hauptspannungskomponenten auch bei einer Querschnittserweiterung bestehen bleiben (siehe Abbildungen 5.6 und 5.7).

Die Abbildung 5.10 liefert einen Überblick darüber, welchen Einfluss die Simulationszeit auf die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse hat. Die Kurvenverläufe mit dem Legendeneintrag *Mittel* spiegeln dabei die räumlich gemittelten Werte in jeder YZ-Ebene wider und sind demzufolge die räumlichen Mittelwerte der zeitlich gemittelten Einzelverläufe. Da die Streuung der Einzelwerte bei einer Verzehnfachung der Simulationszeit geringer ausfällt, kann man von einer räumlichen Konvergenz der zeitlich gemittelten Werte sprechen. Allerdings sind die räumlichen Mittelwerte nahezu identisch, sodass die bisher vorgestellten Diagramme und Ergebnisse, basierend auf der kürzeren Simulationszeit von 50.000 Zeitschritten, hinreichend sind, um die dargestellten Trends zu beschreiben.

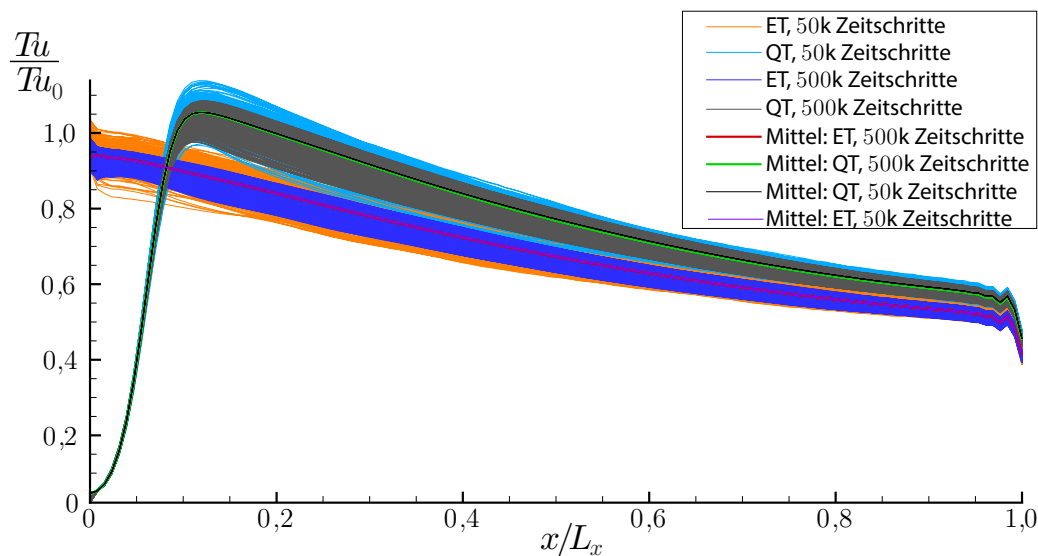


Abbildung 5.10: Vergleich der Ergebnisse nach unterschiedlichen Zeitschrittzahlen:

Turbulenzgrad bezogen auf den Vorgabewert über der Lauflänge

Information zur Legende:

ET $\hat{=}$ Eintrittsrandformulierung

QT $\hat{=}$ Quelltermformulierung

50k $\hat{=}$ 50 000 Zeitschritte

500k $\hat{=}$ 500 000 Zeitschritte

Mittel $\hat{=}$ räumliches Mittel über die YZ-Ebene

Als abschließender Punkt bezüglich der räumlich zerfallenden turbulenten kinetischen Energie sollte das Abknicken aller diskutierter Kurvenverläufe am Ende des Raumsegments diskutiert werden. Dabei handelt es sich um Auswirkungen der verwendeten Austrittsrandbedingung (siehe Anhang A), welche Probleme mit der noch vorhandenen turbulenten kinetischen Energie und den damit verbundenen fluktuierenden Bewegungen hat. Um dieses Verhalten zu umgehen, hätte man an dieser Stelle beispielsweise durch eine Art Buffer-Zone dafür sorgen können, dass die noch vorhandene Turbulenz aufgrund erhöhter Viskosität zu Null gebracht wird und die Strömung am Austritt somit frei von jeglicher turbulenter Energie ist. Da sich die Randbedingung allerdings nicht weiter auf das stromauf liegende Strömungsfeld auswirkt, wurde auf eine derartige Zone verzichtet.

Anhand der Ergebnisse der „auskonvergierteren“ Simulation (500.000 Zeitschritte) soll schließlich das turbulente Energiespektrum basierend auf sogenannten Autokorrelationen dargestellt werden. Man spricht von einer Autokorrelation, wenn man die Abhängigkeiten zwei identischer Komponenten der Geschwindigkeitsfluktuationen am gleichen Ort jedoch zu unterschiedlichen Zeiten t_1 und t_2 beschreiben möchte [6].

Die Autokorrelation

$$B_{ii}(t_1, t_2) = \overline{u_i''(t_1)u_i''(t_2)} \quad (5.6)$$

wird zweckmäßigerweise mit dem Wert der Korrelation zum identischen Zeitpunkt $t_1 = t_2$ normiert:

$$B_{ii}^{norm}(t_1, t_2) = \frac{B_{ii}(t_1, t_2)}{B_{ii}(t_1)} = \frac{\overline{u_i''(t_1)u_i''(t_2)}}{\overline{u_i''^2(t_1)}} \quad (5.7)$$

Mit der Beziehung $\tau = |t_1 - t_2|$ lässt sich daraus ein integrales Zeitmaß T_T , das für die Charakterisierung der Strömung von entscheidender Bedeutung ist, bestimmen:

$$T_T(t_1) = \int_0^\infty B_{ii}^{norm}(t_1, \tau) d\tau \quad (5.8)$$

Die Korrelationen und letztendlich die Energiespektren werden im Rahmen dieser Arbeit basierend auf Auswertungspunkten, die entlang der x -Achse bei $y/L_y = z/L_z \approx 0,5$ positioniert sind und an denen über die komplette Simulationszeit Daten aufgezeichnet werden, bestimmt. Um Fehler aufgrund von Oszillationen zu vermeiden, wird das zugrundeliegende integrale Zeitmaß nicht über die Integration bis $\tau = \infty$ bestimmt. Die obere Integrationsgrenze wird durch den Zeitpunkt ersetzt, an dem die Autokor-

relation die Abszisse schneidet, also den Wert Null annimmt und die jeweiligen Geschwindigkeitsfluktuationskomponenten sich demnach nicht mehr gegenseitig beeinflussen. Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen hierfür die normierten Autokorrelationen gemäß Gleichung 5.7, aufgetragen über der dimensionslosen Abszisse $\tau u_0/L_T$. Für diese dimensionslose Betrachtung der Zeitdifferenz τ wurde die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung aus Tabelle 5.3 und das turbulente Längenmaß aus Tabelle 5.1 verwendet.

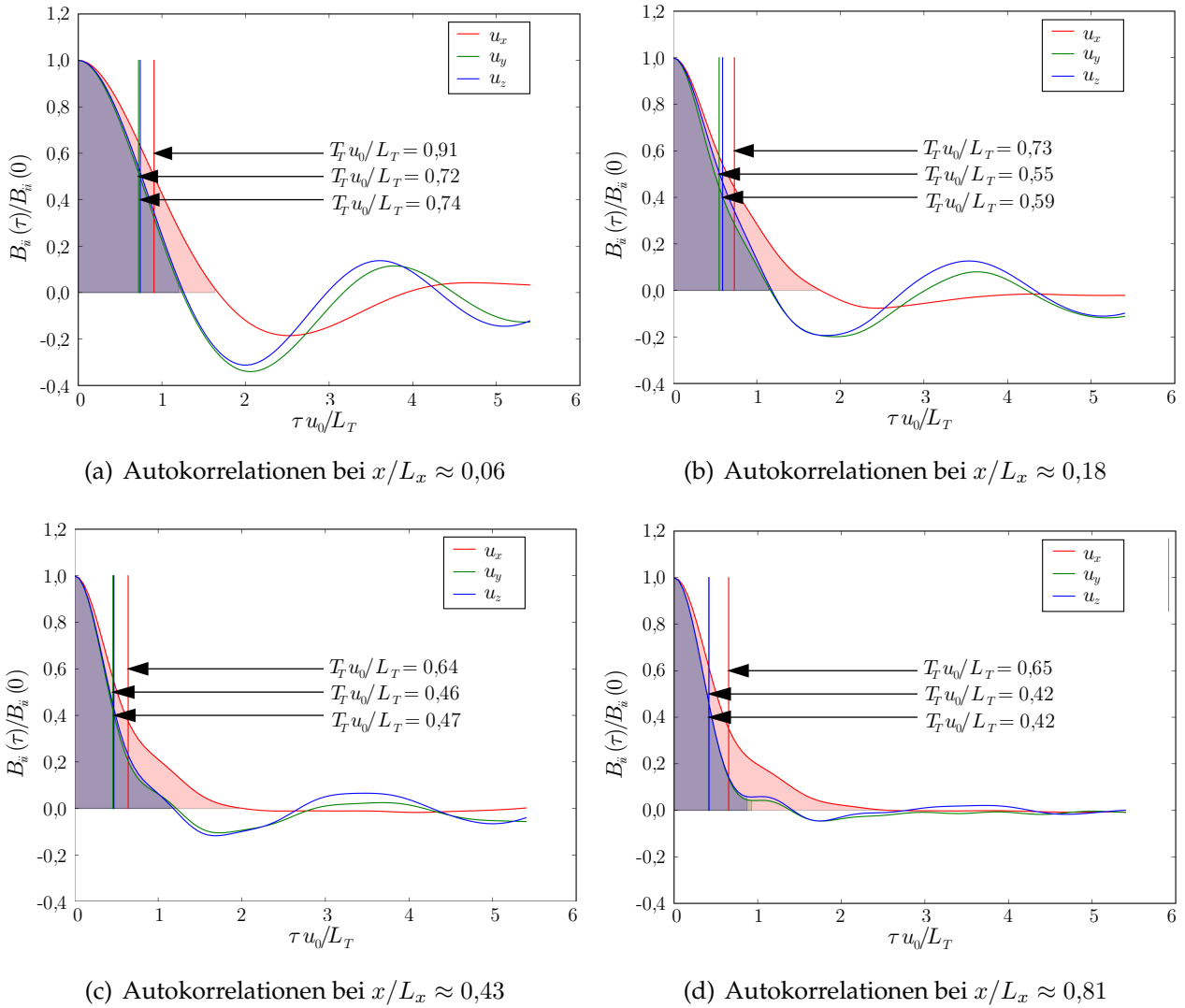


Abbildung 5.11: Autokorrelationen der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Eintrittsformulierung

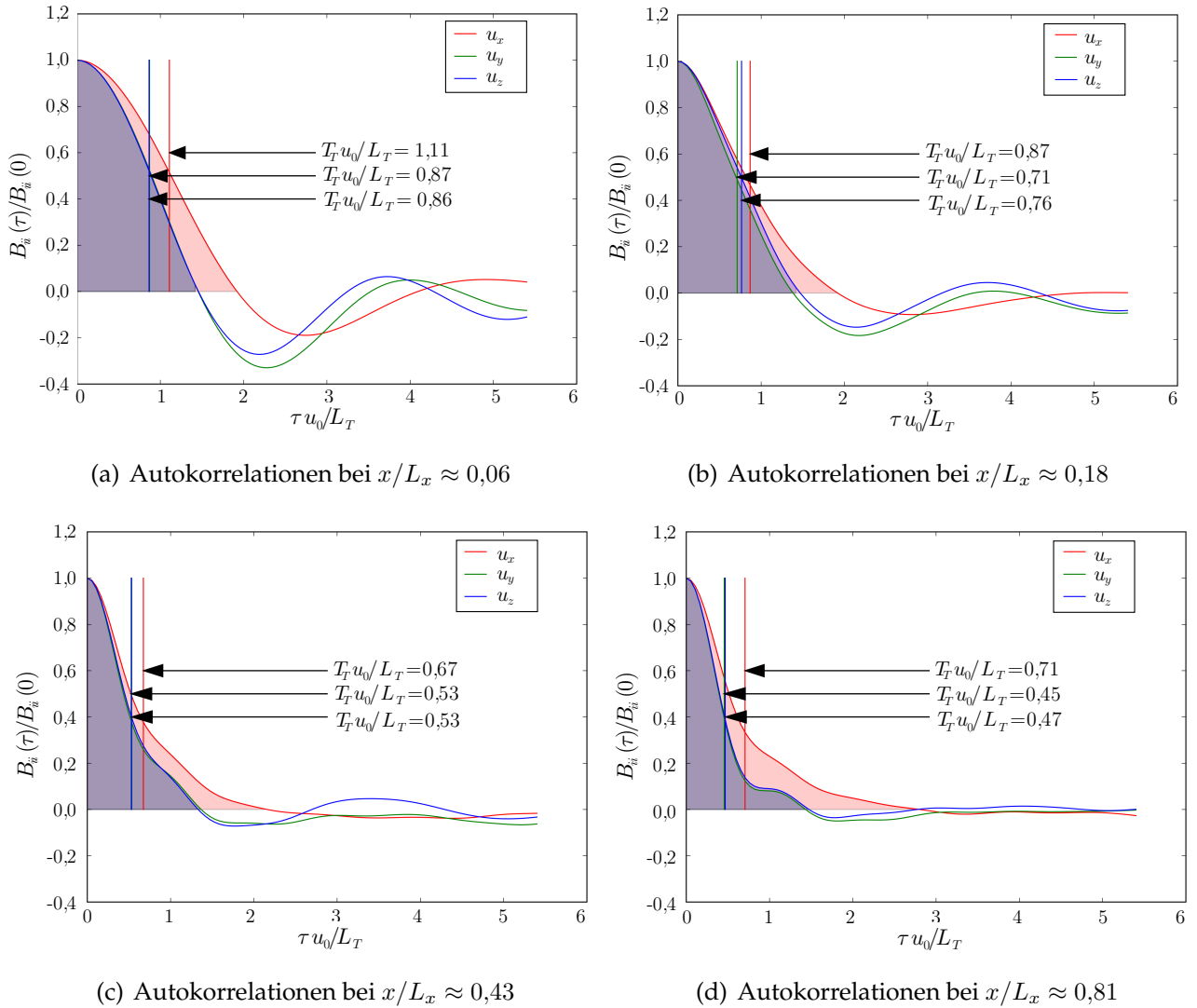


Abbildung 5.12: Autokorrelationen der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Quelltermformulierung

Die integralen Zeitmaße bei Eintritts- und Quelltermformulierung unterscheiden sich nur marginal, sodass beide Methoden ein Abklingen der zeitlichen Beeinflussung aufweisen. Insgesamt führt die Quelltermformulierung zu größeren integralen Zeitmaßen und damit zu einer längeren Abhängigkeit der Geschwindigkeitsfluktuationskomponenten, welche sich durch die bereits erläuterte größere turbulente kinetische Energie, die aufgrund des STG in die Strömung eingebracht wurde, erklären lässt. Außerdem korrelieren die Geschwindigkeitskomponenten in x -Richtung stärker miteinander als quer zur Hauptströmungsrichtung.

Die Energie in Abhängigkeit der zugehörigen Wellenzahl, also das sogenannte Energiespektrum, erhält man aus einer LES mithilfe einer Fouriertransformation der Autokorrelation. Die Fouriertransformierte der Autokorrelation entspricht in diesem Fall dem Leistungsdichtespektrum (engl.: **Power Spectral Density**), das in den Abbildungen 5.13 und 5.14 über der Frequenz aufgetragen ist. Sowohl die Ordinate als auch die Abszisse wurden dabei unter Verwendung der Geschwindigkeit u_0 aus Tabelle 5.3 und des turbulenten Längenmaßes aus Tabelle 5.1 dimensionslos dargestellt.

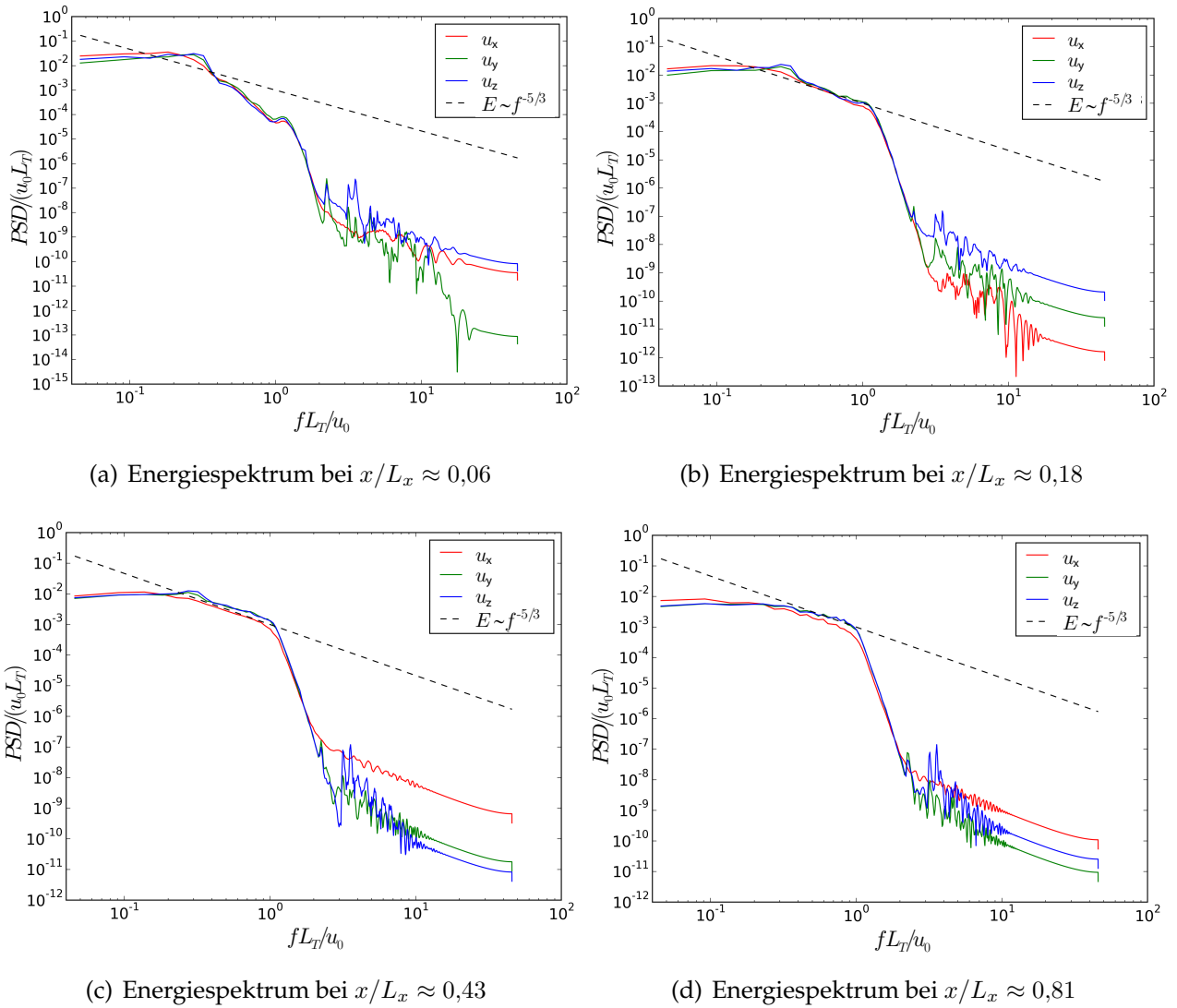


Abbildung 5.13: Energiespektren der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Eintrittsformulierung

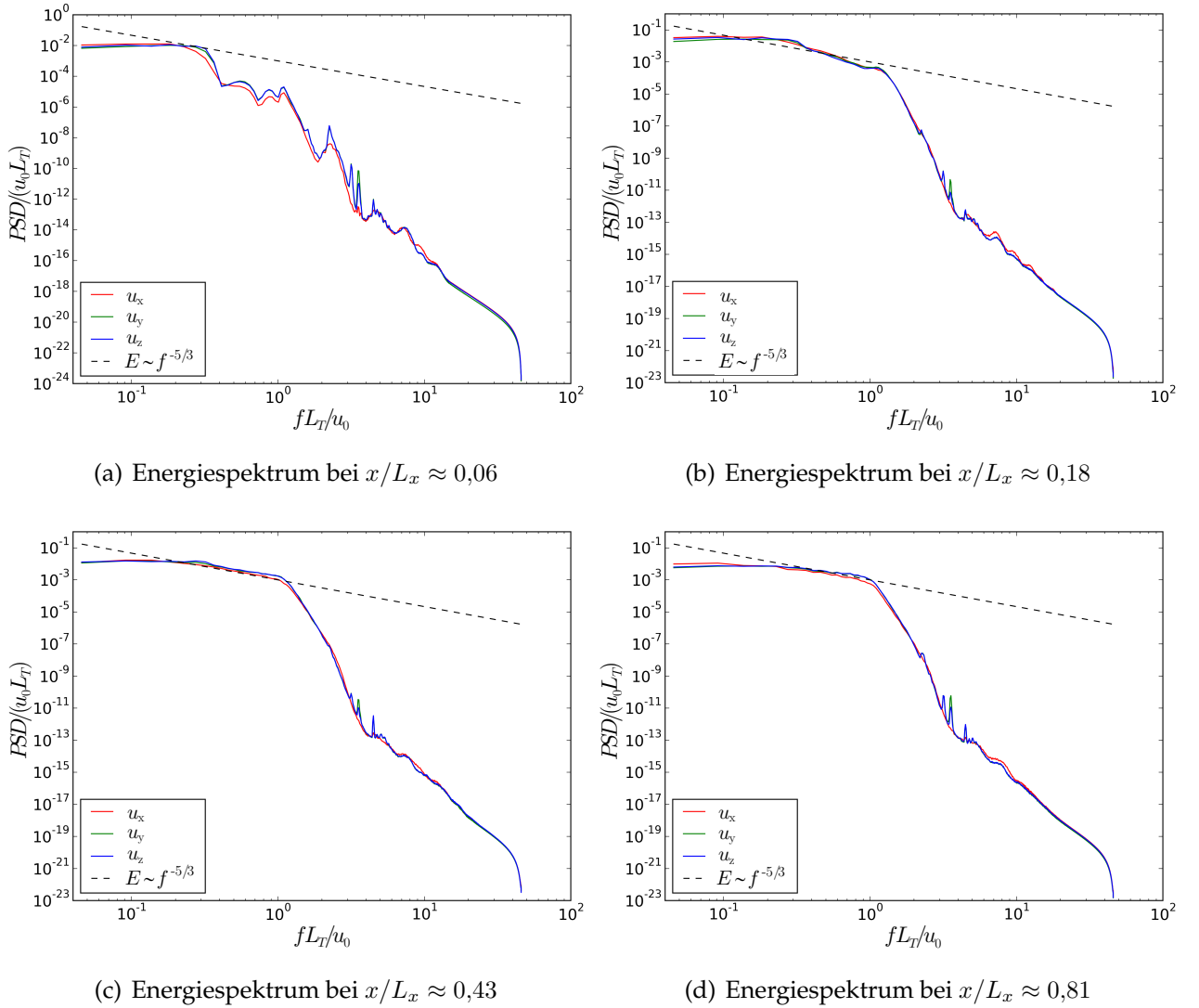


Abbildung 5.14: Energiespektren der räumlich zerfallenden Turbulenz bei der Quelltermformulierung

Beide Formulierungen entwickeln ein ähnliches Energiespektrum, das ebenso dem zu erwartenden charakteristischen Turbulenzspektrum entspricht.

Bereits nach $x/L_x = 0,18$ ist der charakteristische $-5/3$ -Bereich des Spektrums klar zu erkennen. Dieser Inertialbereich wird mit größer werdender Lauflänge besonders in der Mitte des Raumsegments (x -Richtung), wo die verwendeten Randbedingungen keine nennenswerten Einflüsse auf die Strömung haben, zunehmend ausgeprägter. Auf diesen Bereich folgt das Abknicken der Verläufe, bedingt durch die überproportional hohe zeitliche Auflösung verglichen mit der räumlichen Auflösung [6]. Dieser Sachverhalt lässt sich durch die Angabe der vorherrschenden CFL-Zahl von circa 0,63 für den Testfall der räumlich zerfallenden Turbulenz in Zahlen fassen.

Wie man es außerdem von einer gut aufgelösten LES erwarten würde, liegt die Frequenz bzw. Wellenzahl, bei der das Spektrum aufgrund der Verwendung der Gitterschrittweite als Filterweite abgeschnitten wird, im Inertialbereich, was durch Anwendung einer Zweipunktkorrelation, die mithilfe des Abstands \mathbf{r} zwischen zwei betrachteten Punkten definiert ist als

$$B_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \overline{u_i''(\mathbf{x})u_i''(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad , \quad (5.9)$$

überprüft wurde.

5.2 Kanalströmung

5.2.1 Beschreibung

Der synthetische Turbulenzgenerator in Verbindung mit den diskutierten Formulierungsmethoden zum Einbringen der Turbulenz soll darüber hinaus in einem Kanal getestet und validiert werden. Der viskose Wandeinfluss und die damit verbundene Ausbildung einer Grenzschicht, findet jedoch nur in einer Raumrichtung (y -Richtung) statt. In der anderen Raumrichtung (z -Richtung) soll weiterhin die periodische Randbedingung, wie bei der räumlich zerfallenden Turbulenz in Kapitel 5.1, gelten. Um die Entwicklungslänge des verwendeten STG bei einem endlichen Kanal auswerten zu können, ist eine periodische Vorsimulation, also mit einer periodischen Randbedingung in Hauptströmungsrichtung, notwendig. Die daraus resultierende Lösung kann folglich als Initialisierung für den endlichen Kanal verwendet werden und außerdem die notwendigen Eingangsparameter für den STG liefern.

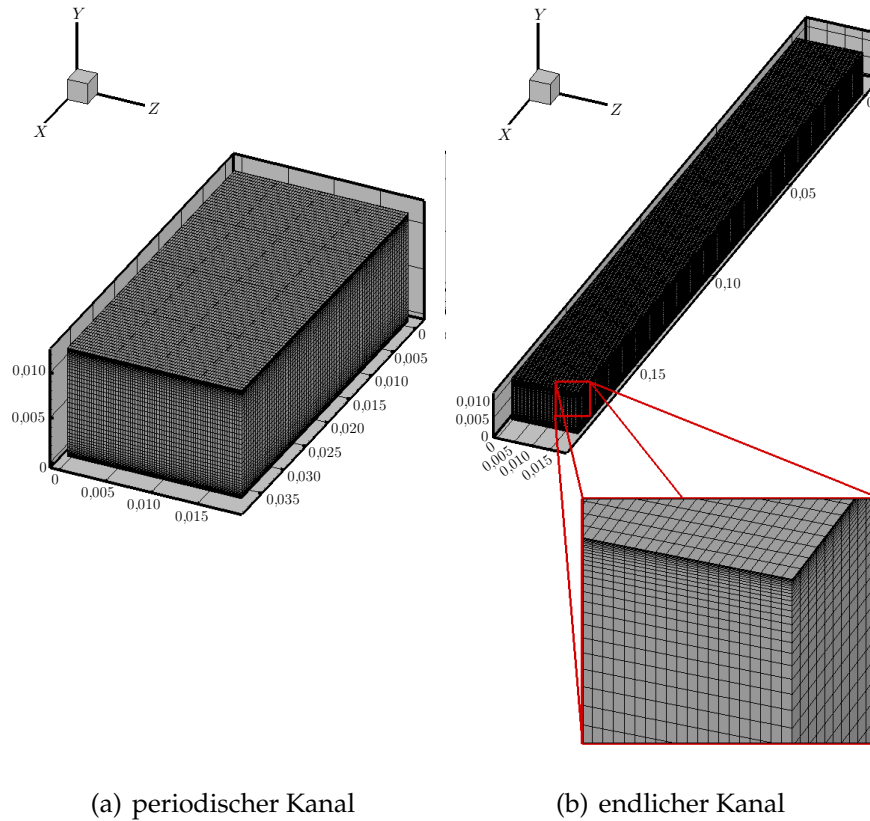
Die erzielten Ergebnisse werden weiterhin mit Referenzdaten einer DNS verglichen. Auf diese Weise können das Geschwindigkeitsprofil und die Verläufe der Reynoldsspannungen in wandnormaler Richtung abgeglichen werden und der STG dadurch validiert werden.

5.2.2 Allgemeines Setup

Die Kanalabmessungen, welche gemäß den Simulationen von Keating et al. [16] gewählt wurden, sowie die Diskretisierung in der jeweiligen Raumrichtung sind Tabelle 5.6 zu entnehmen. Dabei wurde eine halbe Kanalhöhe von $\delta = 0,006 \text{ m}$ verwendet.

Für die Validierung soll eine Strömung mit einer Reynoldszahl, basierend auf der

Wandschubspannung, von $Re_\tau = \delta u_\tau / \nu = 395$ betrachtet werden. Um diese Reynoldszahl sicherzustellen, wird eine konstante Körperkraft als Quellterm in die Impulsgleichung in Strömungsrichtung eingebracht. Aufgrund der einfachen Geometrie, besteht das Netz wieder ausschließlich aus rechtwinkligen Hexaedern (siehe Abbildung 5.15).



(a) periodischer Kanal

(b) endlicher Kanal

Abbildung 5.15: Hexaedernetz der Rechengebiete mit Abmessungen in Meter

Dabei wird sowohl in Strömungsrichtung als auch in spannweitiiger, wandparalleler, Richtung eine äquidistante Verteilung der Gitterzellen angewendet. Im Gegensatz dazu wird das Gitter in wandnormaler Richtung im Sinne des Low-Reynolds-Ansatzes verfeinert, sodass gewährleistet ist, dass das wandnähste Zellzentrum bei $y^+ \approx 1$ und somit innerhalb der viskosen Unterschicht liegt, um eine physikalisch sinnvolle Approximation zu erhalten. Nach [32] berechnet sich der dimensionslose Wandabstand hierfür mithilfe der Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \eta \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (5.10)$$

aus

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad . \quad (5.11)$$

Tabelle 5.6: Diskretisierungssetup der Kanalströmung

	Symbol	Einheit	Kanal	
			periodisch	endlich
Abmessung in Strömungsrichtung	L_x	$[m]$	$2\pi\delta$	$10\pi\delta$
Abmessung normal zur Wand	L_y	$[m]$	2δ	2δ
Abmessung in spannweitisger Richtung	L_z	$[m]$	$\pi\delta$	$\pi\delta$
Zellenanzahl in Strömungsrichtung	N_x	$[-]$	72	360
Zellenanzahl normal zur Wand	N_y	$[-]$	54	54
Zellenanzahl in spannweitisger Richtung	N_z	$[-]$	72	72
Gesamtzellenanzahl	N	$[-]$	279.936	1.399.680

Um eine auskonvergierte Lösung der Kanalströmungssimulation zu erzielen, wird eine transiente Phase von 20 Eddy Turnover Times durchlaufen. Eine charakteristische Eddy Turnover Time berechnet sich dabei gemäß

$$ETT = \frac{tu_\tau}{\delta} . \quad (5.12)$$

Basierend auf vorherigen Untersuchungen von Bergmann et al. [3] erfolgt die statistische Mittelung der Strömungsgrößen erst nach Durchlauf dieser transienten Phase über weitere 20 Eddy Turnover Times. Da diese Berechnung im Preprocessing stattfinden muss, wird für die notwendige Bestimmung der Schubspannungsgeschwindigkeit die Lösung einer vorangegangenen Rechnung verwendet.

Aufgrund der Berücksichtigung des viskosen Wandeinflusses dieses Testfalls, wird das WALE-Modell (siehe Kapitel 2.3.3.3.2) als Feinstrukturmodell für die LES verwendet. Dabei wird ebenso wie in Kapitel 5.1 eine Smagorinsky-Modellkonstante $C_s = 0,17$ verwendet, sodass sich aufgrund von Gleichung 2.69 ein Wert von $C_w = 0,5587$ ergibt.

5.2.3 Periodischer Kanal

5.2.3.1 Setup

Zur Initialisierung der periodischen Kanalströmung wird die Lösung einer RANS-Rechnung mit der entsprechenden Reynoldszahl von $Re_\tau = 395$ verwendet. Ebenso können die Dichte und die Geschwindigkeit als wandnormale Verteilungen direkt aus der RANS-Lösung dem STG übergeben werden. Im Gegensatz zum vorherigen Testfall der räumlich zerfallenden Turbulenz, wird der STG hier nicht als Eintrittsrand- oder Quelltermformulierung verwendet, sondern dient lediglich dazu, Geschwindigkeits-

fluktuationen zu erzeugen, die mittels Superposition mit den mittleren Geschwindigkeitskomponenten zur Initialisierung des kompletten Rechengebiets verwendet werden. Weiterhin geht der Maximalwert der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, entstammend aus der RANS-Lösung, in die Berechnung des Scheinpositionsvektors aus Gleichung 3.5 ein. Die ebenfalls notwendigen Reynoldsspannungen werden ebenso aus der RANS-Lösung extrahiert und dienen außerdem zur Bestimmung des turbulenten Längenmaßes für den STG. Hierfür werden die Reynoldsspannungen und die spezifische turbulente Dissipationrate über den Ansatz aus dem k - ω -Turbulenzmodell in das Längenmaß

$$L_T = \frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega} = \frac{\sqrt{0,5 \left(\overline{u''_x u''_x} + \overline{u''_y u''_y} + \overline{u''_z u''_z} \right)}}{C_\mu \omega} \quad \text{mit} \quad C_\mu = 0,09 \quad (5.13)$$

umgerechnet [28].

Die weiterhin benötigten geometriebedingten Eingangsgrößen für den STG werden direkt aus dem Netz generiert.

Für die anstehende Auswertung ist eine Berechnung einer charakteristischen Geschwindigkeit anhand der Größen in Tabelle 5.7 erforderlich:

$$u_{max} = \sqrt{\gamma R T} Ma = 33,12 \text{ m/s} \quad (5.14)$$

Anzumerken ist dabei wiederum, dass die Machzahl sehr klein gewählt wurde, um einen möglichen Kompressibilitätseinfluss auf die Simulationsergebnisse auszuschließen.

Tabelle 5.7: Vorgabeparameter für die Auswertung der Kanalströmung

Machzahl	Ma	0,1
Temperatur	T	273 K
spezifische Gaskonstante	R	287,06 J/(kg K)
Isentropenexponent	γ	1,4
Dichte	ρ	1,0 kg/m ³

Aufgrund der Gleichung 5.12, in welche die Lösung der RANS-Rechnung eingeht, und der damit verbundenen Annahme von 40 zu simulierenden Eddy Turnover Times, erfolgt die periodische Kanalrechnung mit insgesamt 2.319.900 Zeitschritten. Nach der Hälfte der simulierten Zeit (nach 1.159.950 Zeitschritten ≈ 50 Durchströmvorgängen) beginnt die Mittelung der Strömungsvariablen.

5.2.3.2 Auswertung und Ergebnisse

Wie bereits in der kurzen Beschreibung angedeutet, dienen die räumlich (in x - und y -Richtung) und zeitlich gemittelten Simulationsergebnisse der periodischen Kanalströmung als Eingangsgrößen für die im Anschluss geplante Simulation einer Strömung in einem endlichen Kanal. Dementsprechend soll an dieser Stelle nur kurz auf die erzielten Ergebnisse dieser Rechnung eingegangen werden, indem die zeitlich und räumlich gemittelten Simulationsergebnisse der LES mit den DNS-Referenzlösungen von Iwamoto et al. [13] verglichen werden.

Entscheidende Kriterien dabei sind die Verläufe des Geschwindigkeitsprofils und der Reynoldsspannungen in wandnormaler Richtung. Dafür wird die Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung mit der Schubspannungsgeschwindigkeit und die Komponenten des Reynoldsspannungstensors mit dem Quadrat der Schubspannungsgeschwindigkeit gemäß

$$\tilde{u}_x^+ = \frac{\tilde{u}_x}{u_\tau} \quad (5.15)$$

$$\widetilde{u''_i u''_j}^+ = \frac{\widetilde{u''_i u''_j}}{u_\tau^2} \quad (5.16)$$

skaliert und anschließend über dem dimensionslosen Wandabstand aufgetragen. Die Wurzel der Hauptdiagonalelemente des Tensors $\widetilde{u''_i u''_j}^+$ kann ebenso über

$$\tilde{u''_i}^+ = \sqrt{\widetilde{u''_i u''_i}^+} = \sqrt{\frac{\widetilde{u''_i u''_i}}{u_\tau^2}} \quad (5.17)$$

ausgedrückt werden.

Anhand des Verlaufs des Geschwindigkeitsprofils in wandnormaler Richtung, dargestellt in Abbildung 5.16, lassen sich erste Erkenntnisse gewinnen. Während die LES-Ergebnisse in der viskosen Unterschicht mit dem Verlauf der DNS-Daten nahezu übereinstimmen, erfolgt ab $y^+ \approx 10$ ein Drift zu höheren Geschwindigkeitswerten im logarithmischen Bereich des Profils.

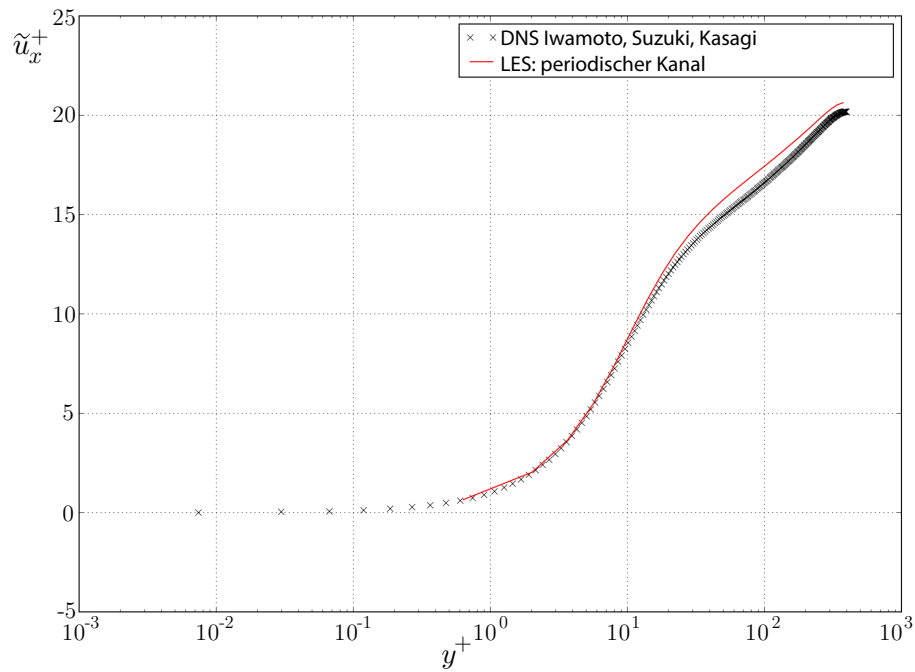


Abbildung 5.16: Mittleres Geschwindigkeitsprofil der periodischen Kanalrechnung

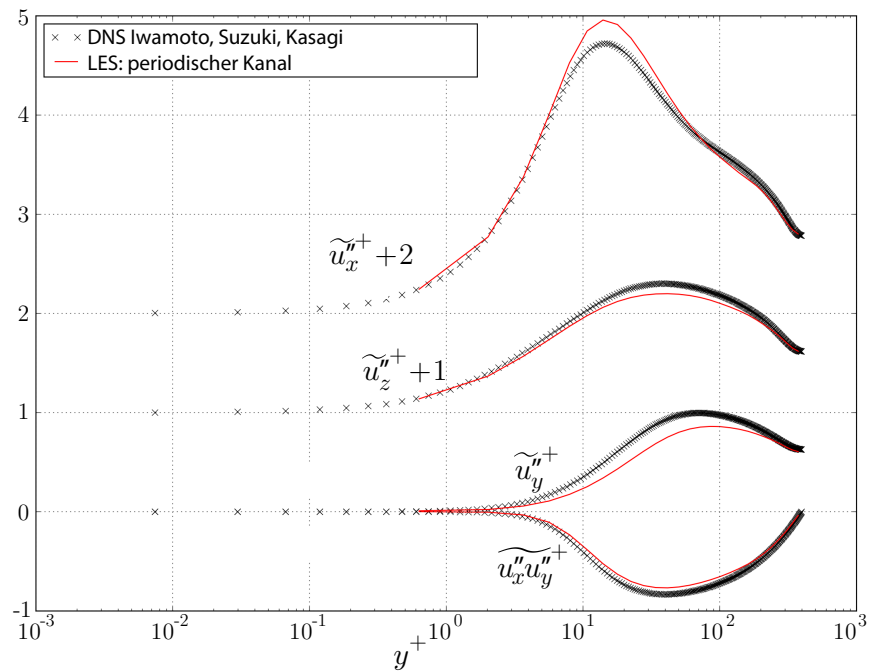


Abbildung 5.17: Quadratisches Mittel der Normalspannungen $\tilde{u}_x^{\prime\prime+}$, $\tilde{u}_y^{\prime\prime+}$, $\tilde{u}_z^{\prime\prime+}$ und Scherspannungskomponente $\widetilde{u_x' u_y'}^+$ in wandnormaler Richtung bei der periodischen Rechnung

Diese Überhöhung ist ebenso bei den Reynoldsspannungen in Abbildung 5.17 zu beobachten, sodass es bei dessen x -Komponente zu einer Überschätzung der Werte, verglichen mit den DNS-Daten, kommt. Die Spannungen, welche aus den Geschwindigkeitskomponenten quer zur Strömungsrichtung resultieren, liegen etwas unter den Vergleichsdaten. Hohe Übereinstimmung erhält man demgegenüber bei der relevanten Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}^+$. Ebenso muss an dieser Stelle erwähnt werden, dass das Rechnernetz relativ grob gewählt wurde, um einen Kompromiss zwischen Exaktheit und Auslastung der Rechenressourcen erzielen zu können. Bergmann et al. [3] zeigten jedoch, dass eine Verfeinerung des Netzes eine weitere Annäherung an eben diese DNS-Daten ermöglicht.

Für die Extraktion von korrekten und repräsentativen turbulenten Längenmaßen, welche als Eingangsdaten für die Simulation der endlichen Kanalströmung benötigt werden, dienen Auswertungspunkte an der Position $x/L_x = 0,13$. Diese Auswertungspunkte sind quer zur Wandnormalenrichtung bei $z/L_z = 0,12$, $z/L_z = 0,51$ sowie $z/L_z = 0,88$ positioniert. Um einen Überblick über deren Lage im simulierten Strömungsgebiet zu bekommen, sind die Positionen der Auswertungspunkte in Abbildung 5.18 dargestellt. Dabei sind die zweiten Momente der Geschwindigkeitsfluktuationen, die Reynoldsspannungen basierend auf einer zeitlichen Mittelung im entsprechenden Querschnitt ebenfalls illustriert. Daran ist ersichtlich, dass es nicht zu den erwarteten homogenen Reynoldsspannungen in z -Richtung kommt, sondern dass dort sogenannte Streaks entlang der Kanallängsachse vorhanden sind. Nach Munters et al. [24] sind diese Wirbelstrukturen auf die geringe Ausdehnung des Rechengebiets in Strömungsrichtung zurückzuführen, sodass die Streaks bedingt durch die periodische Randbedingung permanent erhalten bleiben. Aufgrund dieser Tatsache sind die Positionen der drei Auswertungspunktreihen derart gewählt, dass die benötigten integralen Längen- und Zeitmaße für den STG sowie für die Quelltermformulierung repräsentativ bestimmt werden können. Ausgehend von den integralen Zeitmaßen (siehe Gleichung 5.8) wird anschließend das integrale turbulente Längenmaß unter Miteinbeziehung der lokalen Strömungsgeschwindigkeit gebildet. Beide Größen stehen daraufhin als Funktionen des Wandabstands zur Verfügung. Anschließend erfolgt eine Mittelung der Werte in z -Richtung, sodass diese Mittelwerte letztendlich als adäquate Eingangsgrößen für die endliche Kanalrechnung zur Verfügung stehen. In Abbildung 5.19 sind die resultierenden Verläufe der integralen Größen in wandnormaler Richtung, sowie deren Mittelwerte aufgetragen.

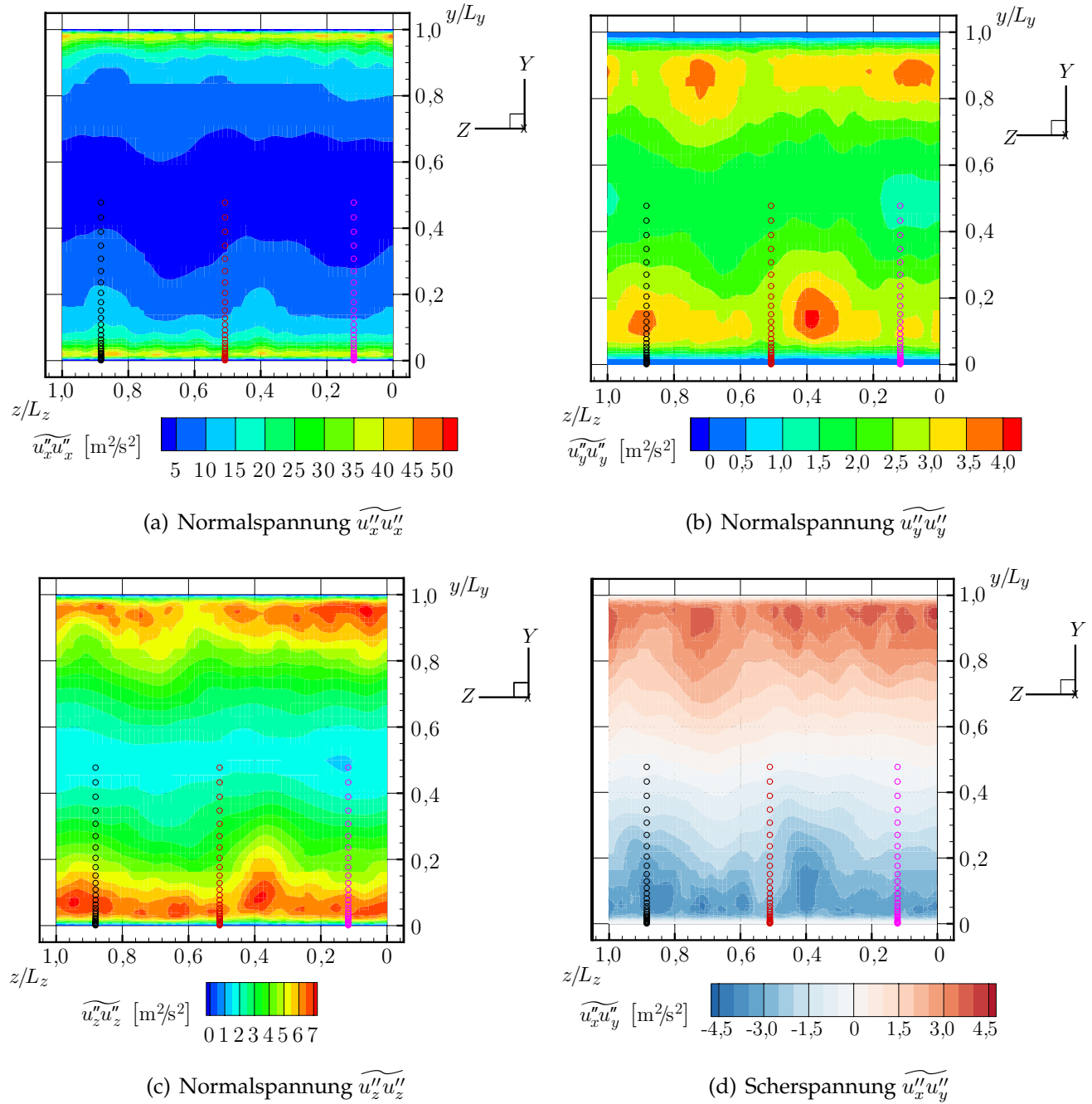


Abbildung 5.18: Position der Auswertungspunkte dargestellt im Hinblick auf die Verteilung der zeitlich gemittelten Reynoldsspannungen bei $x/L_x = 0.5$

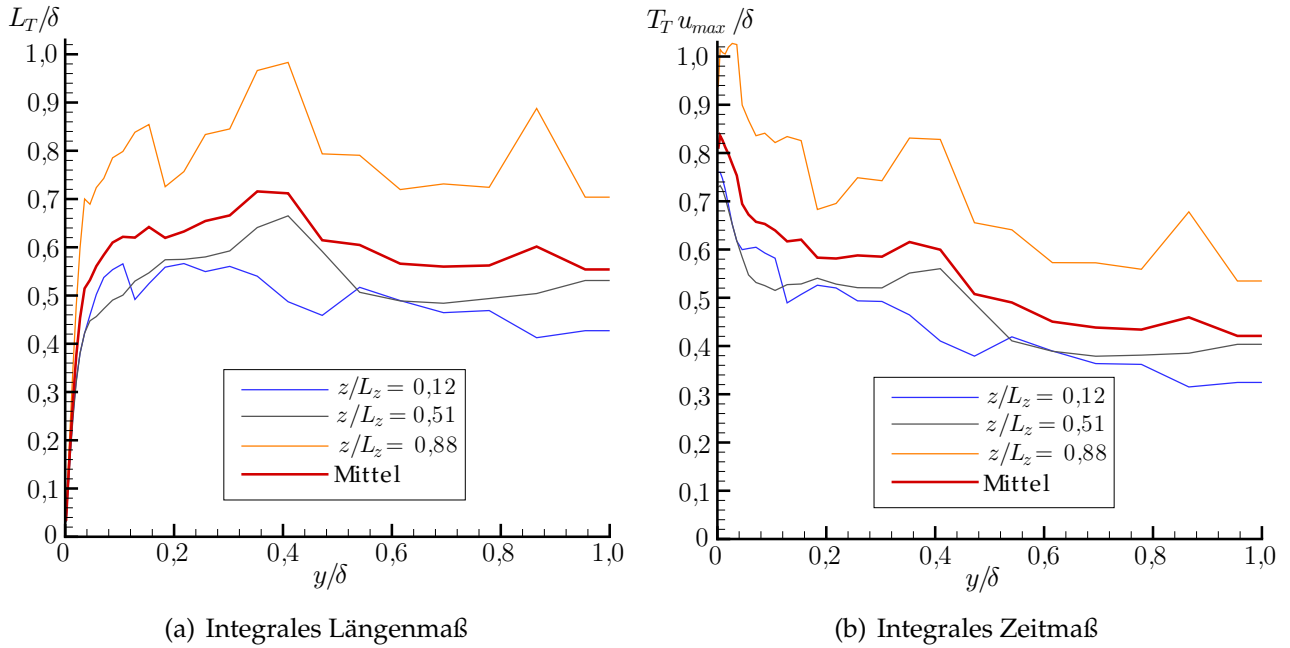


Abbildung 5.19: Resultierende integrale Größen in wandnormaler Richtung aus periodischer Rechnung

5.2.4 Endlicher Kanal

5.2.4.1 Setup

Das numerische Setup der endlichen Kanalrechnung basiert prinzipiell auf der zeitlich sowie in x - und z -Richtung räumlich gemittelten Lösung der periodischen Rechnung. Die relevanten Größen für die Initialisierung, für die Randbedingungen und für den STG werden daraus extrahiert und als eindimensionale Verteilungen in wandnormaler Richtung vorgegeben, weswegen sie in z -Richtung konstant sind. Am Eintrittsrand werden auf diese Weise der Strömungsgeschwindigkeitsvektor sowie die Dichte vorgegeben, die außerdem als Eingangsgrößen für den STG dienen. Um den transienten Vorgang zu Beginn der Simulation zu beschleunigen, wird auf Basis der Geschwindigkeitsverteilung in Strömungsrichtung eine mittlere Geschwindigkeit ermittelt, die zur Bestimmung des Scheinpositionsvektors verwendet wird (siehe Kapitel 4.2). Am Austrittsrand des Rechengebiets wird eine statische Druckverteilung als Randbedingung vorgegeben.

Die integralen Größen und die Reynoldsspannungen zur Bildung der synthetischen Geschwindigkeitsfluktuationen entstammen ebenso der periodischen Kanalrechnung

und werden dem STG übergeben. Bei der Quelltermformulierung der räumlich zerfallenden Turbulenz (siehe Kapitel 5.1) wurden aufgrund der periodischen Randbedingungen konstante integrale Längen und Zeitmaße für Gleichungen 4.6 und 4.7 vorgegeben. Möchte man allerdings eine Grenzschichtströmung berechnen, kommt es durch die Haftbedingung an der Wand zu einer Variation dieser integralen Größen über den Querschnitt. Deswegen ist es zunächst sinnvoll einen Verlauf dieser Größen in wandnormaler Richtung zur Bestimmung des synthetischen Quellterms gemäß Abbildung 5.19 vorzuschreiben. Diese Simulation wird im weiteren Verlauf mit Quellterm V1 bezeichnet. Als alternative Herangehensweise wird eine konstante Vorgabe des integralen Zeit- und Längenmaßes basierend auf den Ergebnissen von Schmidt [33] gewählt und im Folgenden mit Quellterm V2 bezeichnet. Dabei wird ein integrales Längenmaß von $L_T = 0,825\delta$ angenommen. Das integrale Zeitmaß lässt sich dann analog zu Gleichung 4.8 mit einer mittleren Geschwindigkeit des vorgeschriebenen Geschwindigkeitsprofils (aus der periodischen Rechnung) bestimmen.

Die benötigten geometrieabhängigen Größen Wandabstand und Gitterschrittweite ergeben sich wiederum aus dem zugrundeliegenden Rechenetz.

Die Gesamtsimulationszeit dieser Rechnung bestimmt sich wieder basierend auf Gleichung 5.12, in welche ebenfalls die Lösung aus der periodische Rechnung eingeht, und der damit verbundenen Annahme eines Durchlaufs von 40 Eddy Turnover Times. Die Gesamtzeitschrittzahl beträgt in diesem Fall 2.320.196 oder 20 Durchströmvorgängen, wobei die zeitliche Mittelung der Strömungsgrößen nach 1.160.098 Zeitschritten beginnt.

5.2.4.2 Auswertung und Ergebnisse

Um die räumliche Entwicklung der Turbulenz abbilden zu können, wird die Lösung ebenfalls zeitlich aber räumlich lediglich in z -Richtung gemittelt. Ein Vergleich mit den DNS-Daten von Iwamoto et al. [13] findet hierbei ebenso statt, wie ein Vergleich bezüglich der Wandschubspannung mit der vorangegangenen periodischen Kanalrechnung, um daraus resultierend eine Aussage über die Entwicklungslänge machen zu können.

Nutzt man die Eintrittsrandformulierung wird die Entwicklungslänge dementsprechend auf den Abstand zur Eintrittsebene bezogen. Um den Einfluss stromauf und stromab der Quelltermposition bei der Quelltermformulierung darzustellen, ist es wiederum zweckmäßig, den Nullpunkt der dimensionslosen Koordinate x/δ um den An-

teil x_{QT}/δ nach rechts zu verschieben, sodass man eine neue dimensionslose Koordinate

$$\frac{\Delta x}{\delta} = \frac{x}{\delta} - \frac{x_{QT}}{\delta} \quad (5.18)$$

erhält.

Die räumliche Entwicklung, der sich ausbildenden turbulenten Grenzschicht, lässt sich anschaulich anhand der Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}$ in Abbildung 5.20 darstellen. Um einen visuellen Eindruck der sich entwickelnden Wirbelstrukturen inklusive der vorherrschenden Wirbelstärke ω_x zu erhalten und die unterschiedliche Funktionsweise der Quelltermformulierung mit der Eintrittsformulierung abzugleichen, bietet es sich außerdem erneut an, die λ_2 -Isoflächen gemäß dem Wirbelidentifikationskriterium nach [15] in Abbildung 5.21 zu betrachten. Infolge der Anwendung eines STG in Verbindung mit der Eintrittsformulierung bilden sich unmittelbar nach der Eintrittsebene turbulenten Strukturen, die mit größer werdender Lauflänge, bedingt durch die sich ausbildende Grenzschicht, verstärkt werden. Trotz der Tatsache, dass der Quellterm auch eine Stromaufwirkung besitzt, ist bei beiden Schaubildern stromauf der Quelltermposition nahezu keine Turbulenz zu erkennen, sodass es erst nach überschreiten von x_{QT} zu einer Entwicklung der turbulenten Grenzschicht kommt.

In der Abbildung 5.22(a) ist die räumliche Entwicklung entlang der x -Koordinate bezüglich des wandnormalen Geschwindigkeitsprofils für die Eintrittsrandformulierung dargestellt. Wie schon bei der periodischen Kanalströmung zu sehen war, liegen die LES-Ergebnisse in der viskosen Unterschicht ($y^+ < 5$ [32]) sehr dicht an der DNS-Referenzlösung. Es ist weiterhin ersichtlich, dass die Lösung zunächst ausgehend von der Initialisierung (aus zeitlicher und räumlicher Mittelung der periodischen Rechnung stammend) zu höheren Geschwindigkeiten driftet. Nach einer Distanz von $x/\delta \approx 5$ kehrt sich dieser Effekt um und das Profil senkt sich wieder in Richtung des Ausgangsprofils. Dieser Umkehrpunkt ist ebenso in Abbildung 5.22(b) als das Minimum des Reibungsbeiwerts c_f , der nach [32] definiert ist als

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} u_{max}^2} \quad , \quad (5.19)$$

zu identifizieren. Zur Bildung dieser dimensionslosen Größe werden bewusst die Dichte und die Geschwindigkeit u_{max} aus Kapitel 5.2.3.1 verwendet, um die Ergebnisse von periodischer und endlicher Kanalrechnung vergleichen zu können.

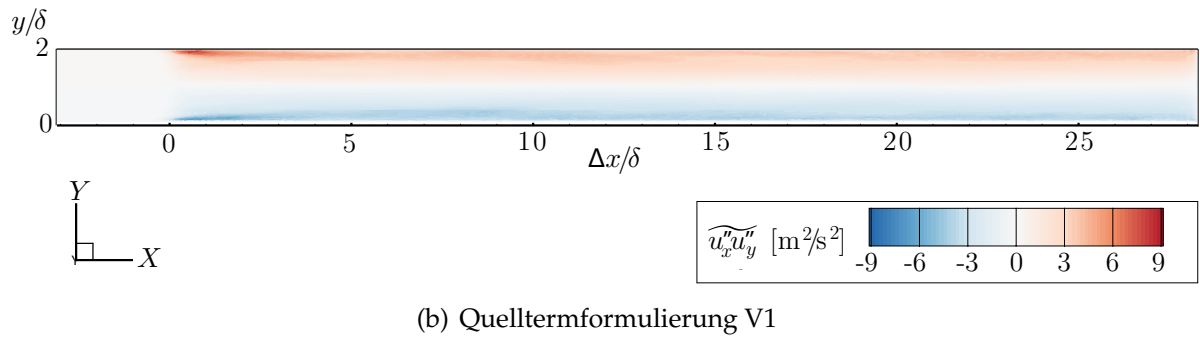
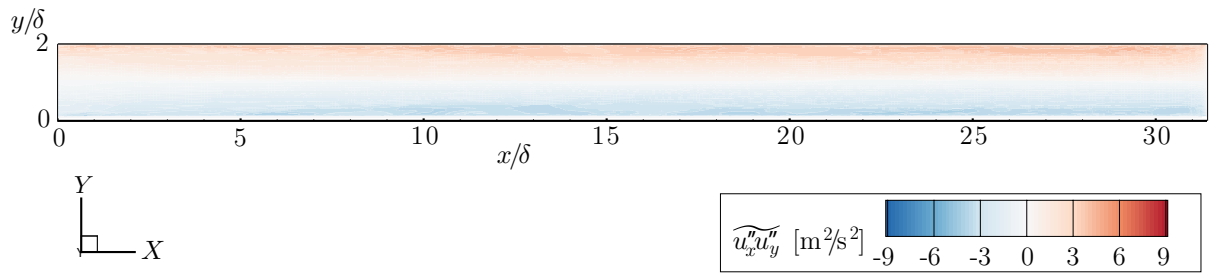


Abbildung 5.20: Räumliche Entwicklung der Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}$

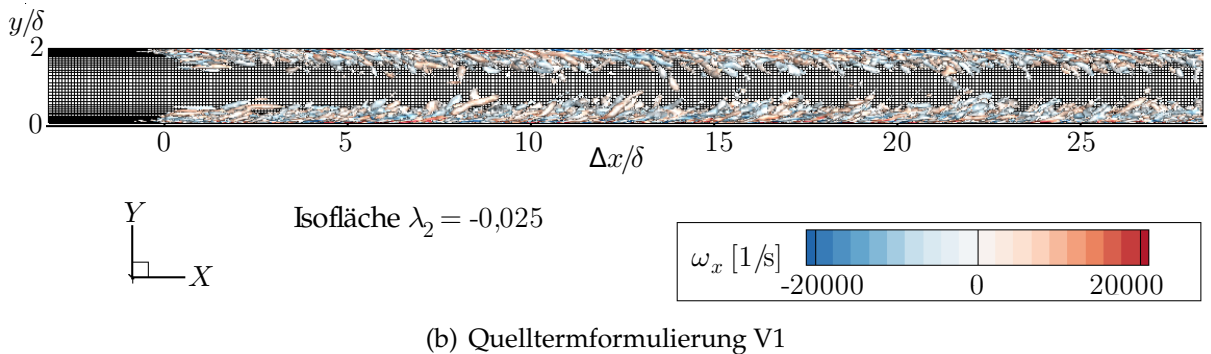
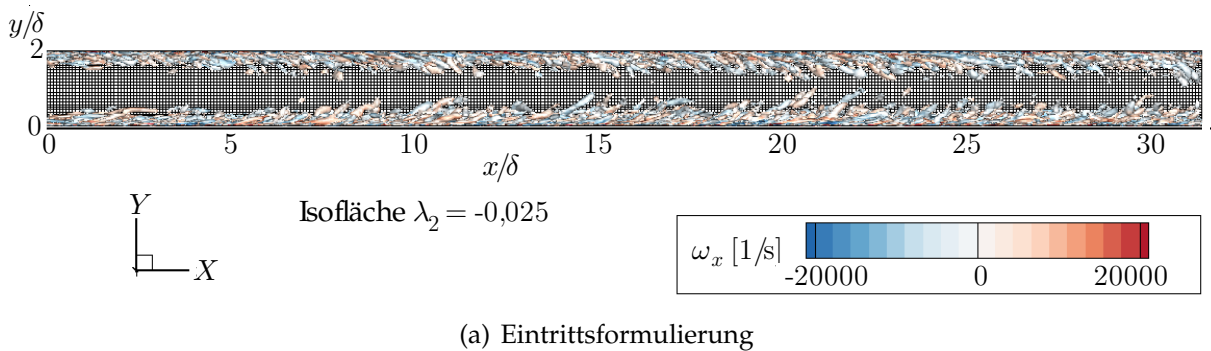


Abbildung 5.21: Räumliche Entwicklung der Wirbelstrukturen in der XY -Ebene

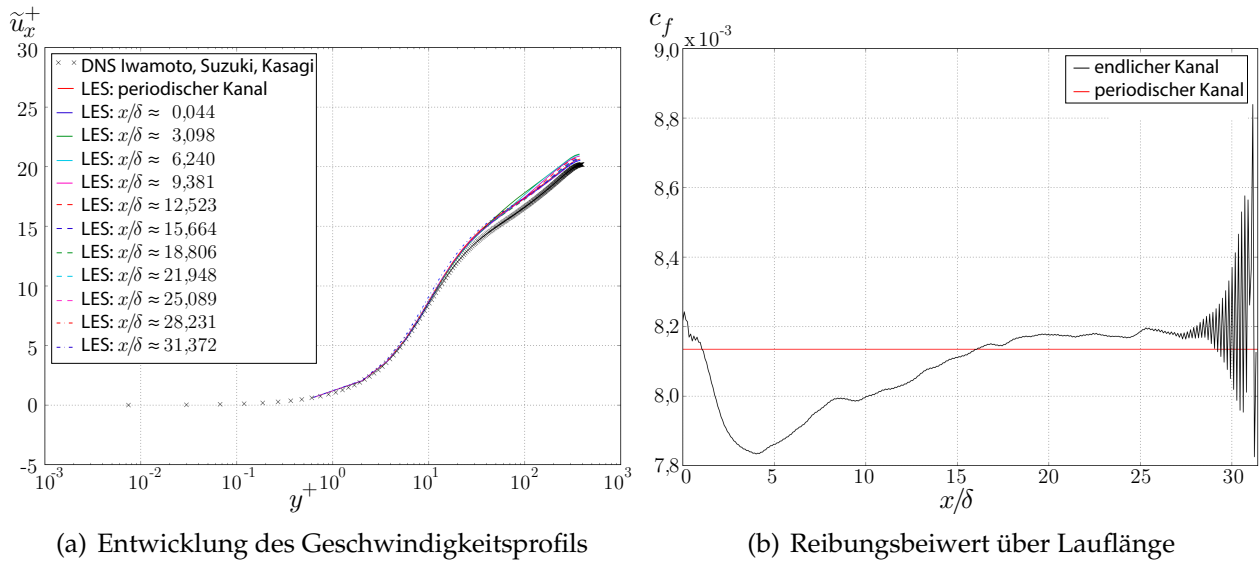


Abbildung 5.22: Auswertung der Entwicklungslänge der Eintrittsformulierung

Basierend auf Abbildung 5.22(b) kann die Aussage getroffen werden, dass nach einer Laufstrecke von ungefähr $20 x/\delta$ die Turbulenz vollständig ausgebildet ist. Nach passieren dieser Strecke, wird jedoch ein etwas größerer Reibungsbeiwert verglichen mit der periodischen Lösung erreicht. Die oszillierende Überhöhung am Austritt aus dem Rechengebiet, lässt sich durch die verwendete Randbedingung (siehe Anhang C), erklären und soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter analysiert werden.

Betrachtet man hingegen die dimensionslosen Reynoldsspannungen in Abbildung 5.23, fällt zunächst ebenso auf, dass, bedingt durch die Austrittsrandbedingung, die Simulation der Strömung bei $x/\delta > 28,5$ keine realistischen Ergebnisse mehr liefert. Jedoch ist bis zu dieser x -Position ein stetiges Anwachsen der Reynoldsspannungen zu verzeichnen, sodass sich die dargestellten Verläufe der Normalspannungen und der relevanten Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}^+$ dem periodischen Ergebnis annähern. Dieses sukzessive Anwachsen der Reynoldsspannungen ist dadurch zu erklären, da es aufgrund der Grenzschicht und den damit verbundenen Geschwindigkeitsgradienten zu einer weiteren Turbulenzproduktion entlang der Lauflänge kommt.

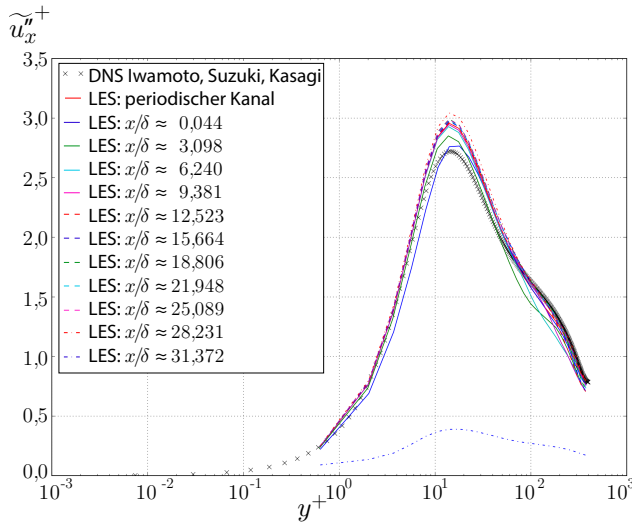
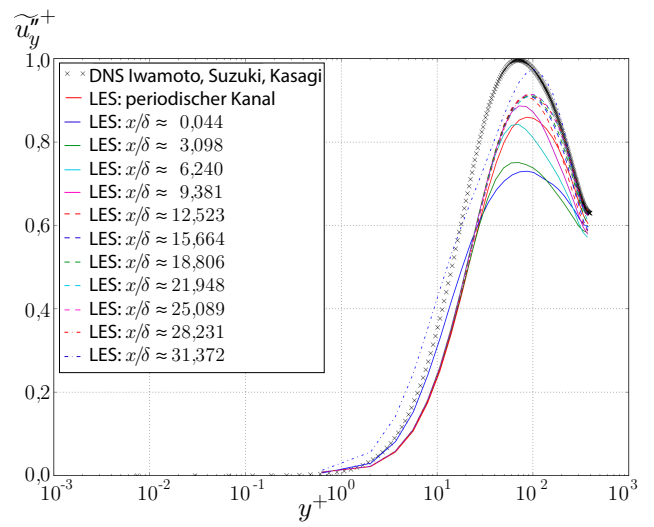
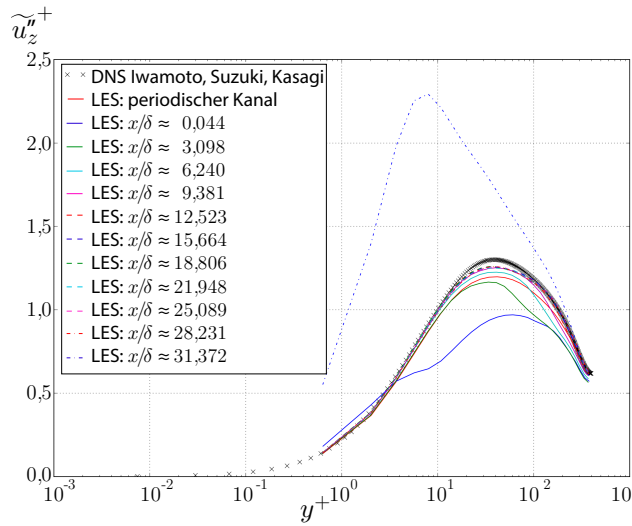
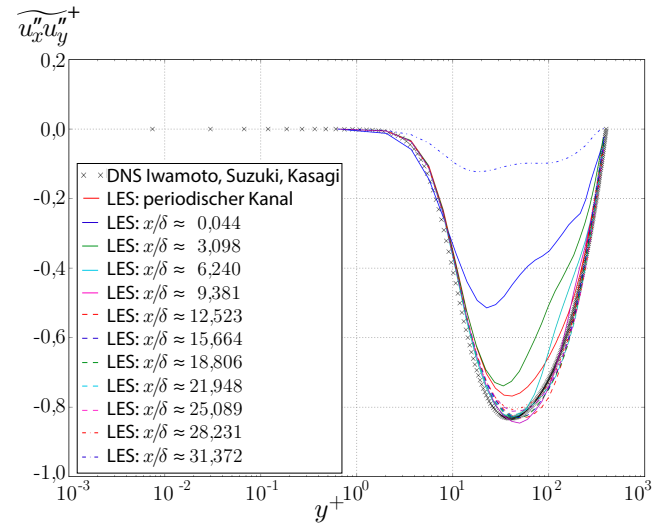
(a) Quadratisches Mittel der Normalspannung $\widetilde{u''_x+}$ (b) Quadratisches Mittel der Normalspannung $\widetilde{u''_y+}$ (c) Quadratisches Mittel der Normalspannung $\widetilde{u''_z+}$ (d) Scherspannung $\widetilde{u''_x u''_y+}$

Abbildung 5.23: Entwicklung der Reynoldsspannungen in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei der Eintrittsformulierung

Anhand von Abbildung 5.24, welche die dimensionslosen Geschwindigkeitsprofile der beiden Quelltermformulierungsvarianten V1 und V2 und deren räumliche Entwicklung darstellt, erkennt man zunächst erneut, dass die LES-Lösung in der laminaren Unterschicht ($y^+ < 5$ [32]) sehr dicht an der DNS-Referenzlösung liegt, da in diesem Bereich schließlich keine räumliche, turbulente Entwicklung zu erwarten ist. Bei beiden Varianten kommt es an der Position $\Delta x/\delta \approx -0,044$, sprich nahezu exakt der Quelltermposition x_{QT} , zu einer starken Abweichung von den DNS-Daten. Diese Ab-

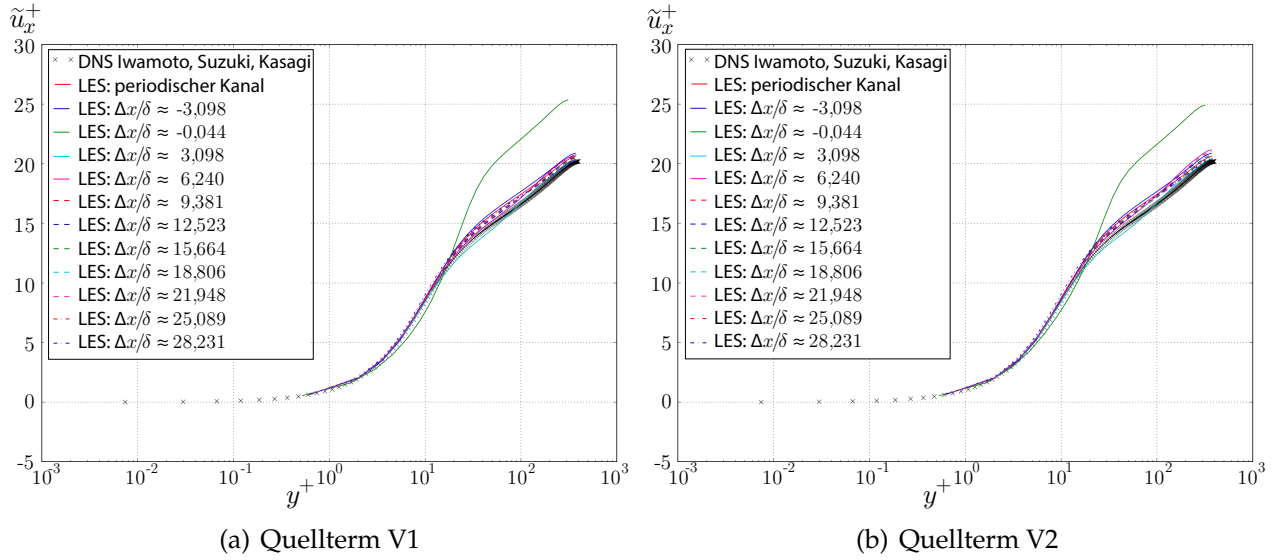


Abbildung 5.24: Vergleich der Entwicklung der Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung aufgetragen über dem Wandabstand bei den Quelltermformulierungen

weichung ist auf die Entwicklung eines laminaren Geschwindigkeitsprofils zurückzuführen, da, wie bereits gezeigt, stromauf der Quelltermposition keine aufgelöste Turbulenz vorhanden ist.

Daraufhin konvergieren beide Verfahren gegen Geschwindigkeitsprofile, die ungefähr der periodischen Lösung entsprechen, sodass die resultierenden Geschwindigkeiten etwas über dem DNS-Referenzprofil liegen.

In der Übergangsschicht ($5 < y^+ < 70$ [32]) liegen die Lösungen in der Nähe der Quelltermposition am dichtesten an den DNS-Ergebnissen, wohingegen in der Überlappungsschicht ($y^+ > 70$ [32]) die Lösungen umso besser die DNS-Daten reproduzieren je weiter weg sie von x_{QT} liegen.

Anzumerken ist außerdem, dass beide Verfahren bereits nach vollständiger Durchströmung des Einflussgebiets (bei $\Delta x / \delta \approx 3,098$) eine Geschwindigkeitsverteilung vorweisen, die im Mittel mit hoher Übereinstimmung das DNS-Profil nachbildet. Weiterhin erkennt man auch anhand der Lösung an der Position $\Delta x / \delta \approx 3,098$ die unterschiedlichen Verhalten im Übergangs- und Überlappungsbereich, sodass es bei $y^+ \approx 70$ zu einem Schnittpunkt mit dem DNS-Geschwindigkeitsprofil kommt.

Die Entwicklungslänge der Quelltermformulierung lässt sich, wie bei der Eintrittsformulierung bereits erläutert, über den dimensionslosen Reibungsbeiwert bewerten. Die beiden Varianten der Quelltermformulierungen werden diesbezüglich in Abbildung 5.25 mit der Eintrittsformulierung sowie der periodischen Kanallösung (Achtung: Bezug auf Abszisse x/δ) verglichen.

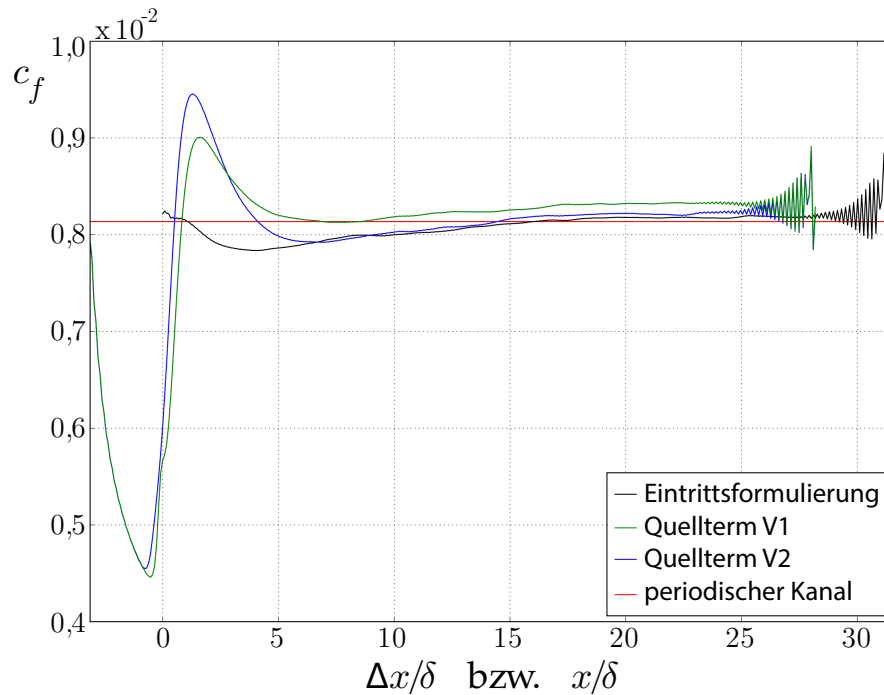


Abbildung 5.25: Vergleich der Reibungsbeiwerte über Lauflänge der verschiedenen Methoden

Bei der Verwendung eines zusätzlichen Quellterms in der Impulsgleichung muss damit gerechnet werden, dass es stromauf der Quelltermposition zu einem starken Abfall von c_f , gefolgt von einem rapiden Ansteigen inklusive eines Überschwingens nach passieren von $x_{QT} \hat{=} \Delta x/\delta=0$ kommt. Gerade dieser Überschwinger fällt bei der Quelltermformulierung V2 größer aus als bei V1. Daraufhin sinkt der Reibungsbeiwert wieder, sodass sich insgesamt bei der Quelltermformulierung schneller ein nahezu konstanter Wert verglichen mit der Eintrittsrandformulierung (vergleiche Abbildung 5.22(b)) einstellt. In diesem Fall kann man von einer Entwicklungslänge von $\Delta x/\delta \approx 15$ ausgehen. Der starke Abfall des Reibungsbeiwerts stromauf der Quelltermposition ist ein Anzeichen für eine angehenden Laminarisierung der Strömung, bis schließlich die turbulenten Fluktuationen ihre Wirkung entfalten, die Strömung eine vollständig ausgebildete turbulente Grenzschicht entwickelt und die Wandschubspannung bzw. der

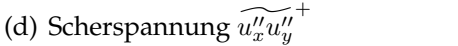
In der Abbildung 5.26 ist die räumliche Entwicklung der Reynoldsspannungen für Quelltermformulierung V1 dargestellt. Anders als bei der Eintrittsrandformulierung (vergleiche Abbildung 5.23) kommt es bei der Verwendung eines Quellterms zum Anwachsen der Reynoldsspannungen ausgehend von dem Fall, dass zunächst am Eintritt in das Rechengebiet keine turbulente kinetische Energie vorhanden ist (siehe dazu auch Abbildung 5.20(b)).

Verglichen mit der Eintrittsrandformulierung liefert die Quelltermformulierung V1 bei den Normalspannungskomponenten in y - und z -Richtung wesentlich größere Übereinstimmung mit den DNS-Ergebnisse, wohingegen sie bei der relevanten Scherspannungskomponente $\widetilde{u''_x u''_y}^+$ die Referenz weniger übereinstimmend reproduziert. Die Simulationsergebnisse hinsichtlich der Normalspannungskomponente in x -Richtung sind bei Eintrittsrand- und Quelltermformulierung weitestgehend identisch.

Die dimensionslosen Reynoldsspannungen der Variante V2 ähneln sowohl qualitativ als auch quantitativ den diskutierten Kurvenverläufen der Variante V1 (siehe Abbildung 5.27). Lediglich die Verläufe von $\widetilde{u''_x}^+$ und $\widetilde{u''_x u''_y}^+$ weisen nahe der Position x_{QT} sehr starke Abweichungen von der DNS-Lösung auf, die letztendlich auch im großen Überschwinger des Reibungsbeiwerts (siehe Abbildung 5.25) resultieren, weswegen die Quelltermformulierung mit konstantem integralen Längen- und Zeitmaß nicht zu empfehlen ist und man immer auf die physikalisch sinnvollere Variante V1 zurückgreifen sollte. Nach vollständiger Durchströmung des Einfussgebiets der Quelltermformulierung ($\Delta x/\delta \approx 3,098$) minimieren sich diese Effekte jedoch wieder.

Um das sich entwickelnde Energiespektrum darstellen zu können, werden wieder Auswertungspunkte entlang der Kanallänge bei $y/L_y = z/L_z \approx 0,5$ positioniert. Aus den sich anhand von Gleichung 5.6 ergebenden Autokorrelationen werden anschließend über eine Fouriertransformation die Energiespektren (Power Spectral Density), die an ausgewählten Positionen im Kanal für die Eintrittsformulierung in Abbildung 5.28 und für die Quelltermformulierung V1 in Abbildung 5.29 dargestellt sind, bestimmt. Dabei wurden die halbe Kanalhöhe δ sowie die Geschwindigkeit u_{max} aus Gleichung 5.14 verwendet, um dimensionslose Größen betrachten zu können.

Trotz der vergleichsweise langen benötigten Strecken zum Ausbilden einer vollturbulenten Grenzschicht, die sich aus der Abbildungen 5.22(b) für die Eintrittsrandformulierung und der Abbildung 5.25 für die Quelltermformulierung gewinnen ließen, lassen die dargestellten Energiespektren den Schluss zu, dass das charakteristische Spektrum in der Kanalmitte mit einem ausgeprägten Inertialbereich bereits nach geringeren Lauflängen ausgebildet ist.



Vergleicht man das Energiespektrum der Eintrittsrandformulierung bei $x/\delta \approx 8,60$ mit dem der Quelltermformulierung bei $\Delta x/\delta \approx 5,45$, stellt man fest, dass die Verläufe nahezu übereinstimmen, obwohl das betrachtete Energiespektrum der Quelltermformulierung circa 35% näher an der Position der synthetischen Turbulenzerzeugung liegt. Die Energiespektren liefern folglich ebenfalls die Erkenntnis, dass es durch die

Verwendung der Quelltermformulierung zu einer schnelleren Ausbildung der natürlichen Turbulenz verglichen mit der Eintrittsrandformulierung kommt.

Da bei der Simulation der turbulenten Grenzschicht eine CFL-Zahl von circa 0,07 in der Kanalmitte und 0,85 an der Kanalwand verwendet wurde, kann man, wie auch schon bei der räumlich zerfallenden Turbulenz, das Abknicken der Energiespektren im Anschluss an den Inertialbereich, aufgrund einer überproportional höheren zeitlichen Auflösung verglichen mit der räumlichen Diskretisierung, erkennen.

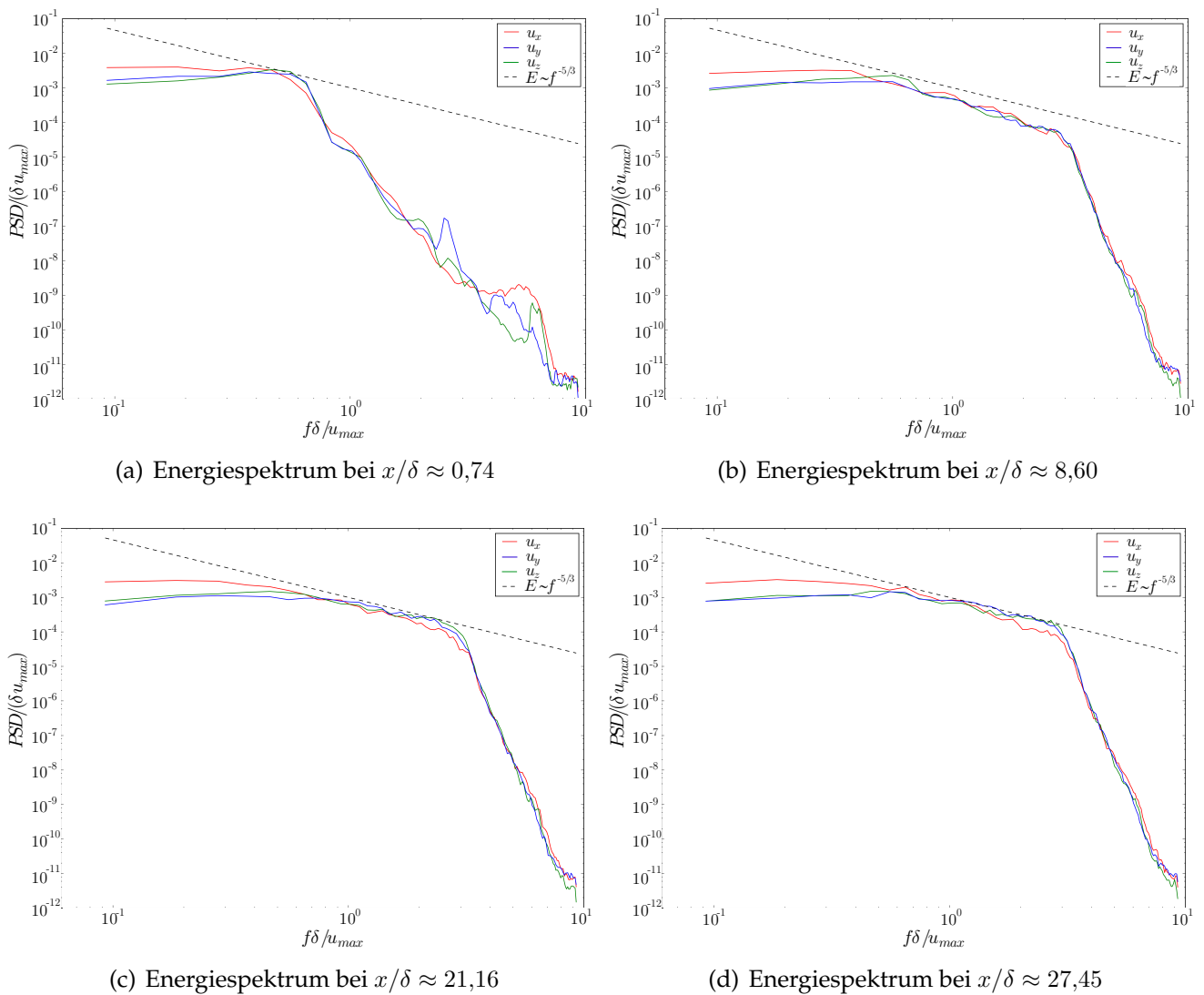
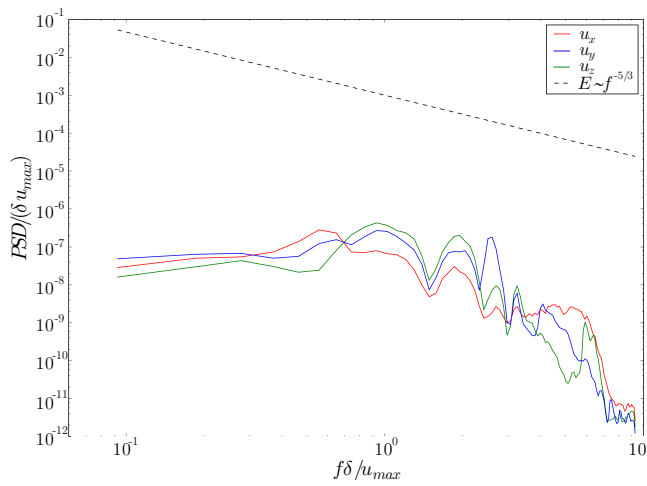
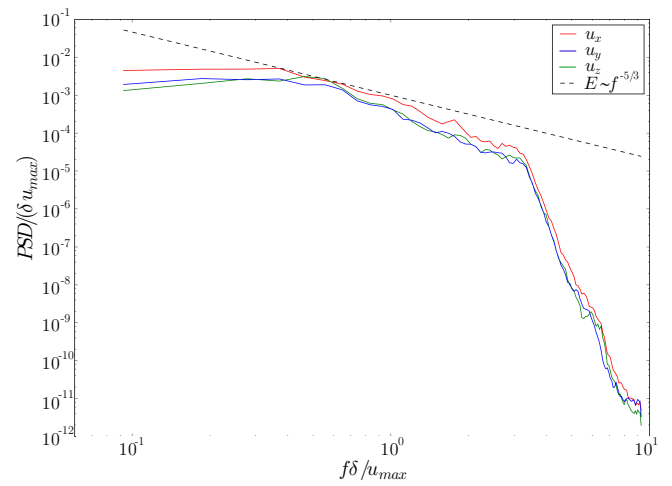


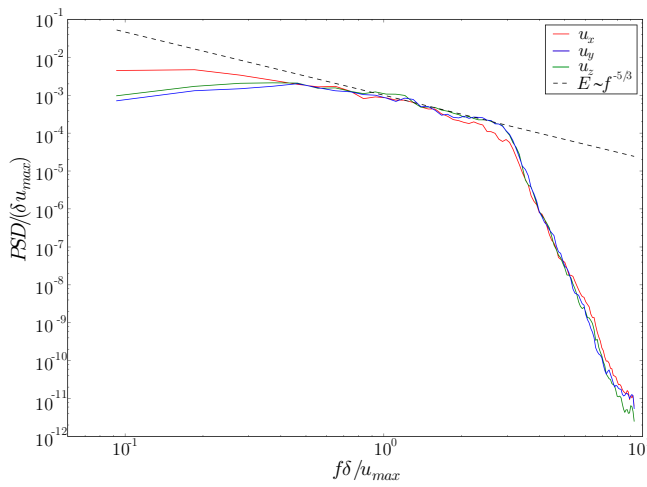
Abbildung 5.28: Energiespektren der Kanalströmung bei der Eintrittsformulierung



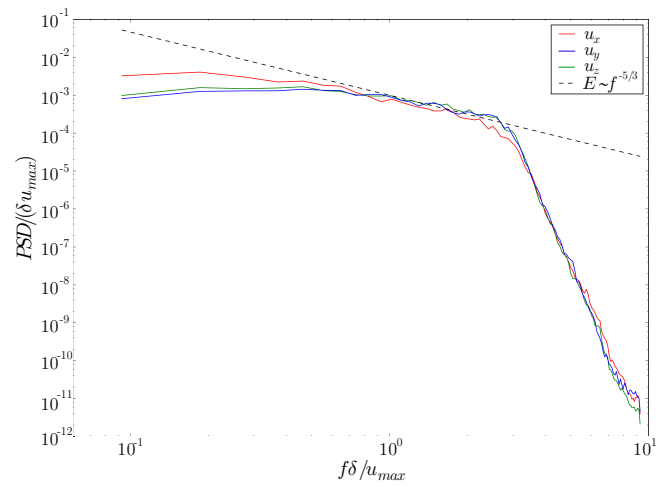
(a) Energiespektrum bei $\Delta x/\delta \approx -2,40$



(b) Energiespektrum bei $\Delta x/\delta \approx 5,45$



(c) Energiespektrum bei $\Delta x/\delta \approx 18,02$



(d) Energiespektrum bei $\Delta x/\delta \approx 24,30$

Abbildung 5.29: Energiespektren der Kanalströmung bei der Quelltermformulierung
V1

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde der synthetische Turbulenzgenerator nach Shur et al. [36] für skalenauflösende Simulationen in Verbindung mit dem CFD-Löser TRACE des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt untersucht.

Zunächst wurde dazu die bereits bestehende Implementierung des STG als Randbedingungsformulierung erweitert, sodass zusätzlich die Möglichkeit besteht, die synthetisch erzeugten Geschwindigkeitsfluktuationen basierend auf einer Quelltermformulierung angelehnt an Schmidt [33] in das Strömungsgebiet zu bringen. Auf diese Weise erlangt man die gewünschte numerische Flexibilität, was die Startposition des turbulenten Strömungscharakter und somit die notwendige Feinheit des Rechennetzes anbelangt.

Darüber hinaus bietet der STG nun in Verbindung mit den dargestellten Methoden zum Einbringen der Turbulenz die Option alle Eingangsgrößen als räumlich aufgelöste Verteilungen vorgeben zu können. Dies eröffnet gerade bei der Simulation von Wandgrenzschichten die Möglichkeit realitätsnahe Einstrombedingungen für das betrachtende Rechengebiet zu kreieren. Wie die Ergebnisse diesbezüglich offenlegten, bietet sich dabei für die Quelltermformulierung ebenso eine räumliche Variation der integralen Skalen, die allerdings aus einer separaten Vorsimulation oder einem Experiment stammen müssen, an. Sollten diese Daten nicht bekannt sein und toleriert man die erläuterten Nachteile in unmittelbarer Nähe der Quelltermposition, ist eine konstante Vorgabe der integralen Größen ebenfalls denkbar.

Die unphysikalischen Auswirkungen der nicht periodischen Definition des verwendeten synthetischen Turbulenzgenerators nach Shur et al. [36] können durch eine Vergrößerung des Verhältnisses der Querschnittsfläche zum turbulenten Längenmaß weitestgehend ausgeglichen werden. Allerdings konnte dadurch die erwartete Isotropie der Strömung beim Testfall der räumlich zerfallenden Turbulenz nicht korrekt abgebildet werden. Aufgrund dessen ist es ratsam die Periodizität durch den Ansatz von Morsbach und Franke [23] zu erzwingen. Außerdem hat dies den Vorteil, dass man das Rechengebiet nicht erweitern muss, was schließlich in praxisrelevanten Simulation oft nicht durchführbar ist.

Bei der Simulation der turbulenten Grenzschicht zeigt der STG außerdem, dass er in der Lage ist, die Anisotropie qualitativ und auch quantitativ wiederzugeben. Diesbezüglich sollte nun unter Verwendung von mehr Rechenkapazitäten eine Verfeinerung des Rechennetzes durchgeführt werden, um eine weitere Annäherung an die DNS-Referenzdaten zu ermöglichen.

Weiterhin konnten die charakteristischen Entwicklungslängen, welche die Strömungen zurücklegen müssen, bis sich, basierend auf den synthetisch erzeugten Fluktuationen, reale turbulente Strukturen entwickelt haben, im Rahmen der Kanalströmungssimulation evaluiert werden. Diesbezüglich fällt die Entwicklungslänge bei der Quelltermformulierung (15 δ) etwas kürzer aus als bei der Randbedingungsformulierung (20 δ). Zusätzlich zu mehr numerischer Flexibilität, besitzt die Verwendung einer synthetischen Volumenquelle demnach ebenso Performancevorteile, weswegen die Quelltermformulierung prinzipiell zu bevorzugen ist.

Weiterführende Arbeiten in diesem thematischen Kontext sollten sich darüber hinaus mit der Optimierung der Randbedingungen am Ein- und Austritt des Rechengebiets auseinandersetzen, sodass zukünftige Simulationen über den gesamten Rechenraum hinweg physikalisch sinnvolle und somit brauchbare Ergebnisse produzieren.

In Anbetracht der Tatsache, dass die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen bei kleinen Reynolds- und Machzahlen durchgeführt wurden, sollte der STG in Verbindung mit Eintrittsrandbedingung und Quelltermformulierung außerdem im Hinblick auf einen größeren Geschwindigkeitsbereich getestet und validiert werden.

Für die Zukunft ist es das anvisierte Ziel, weitere synthetische Turbulenzgeneratoren in TRACE zu integrieren, um auf diese Weise Unterschiede hinsichtlich Machbarkeit, relevanter Entwicklungslängen sowie praxisrelevanter Anwendungsgebiete bewerten zu können. Als zeitnahe, praxisrelevanter Schritt werden in diesem Zusammenhang numerische Strömungsberechnungen von Schauffelgittern mit synthetisch erzeugter turbulenter Zuströmung durchgeführt.

Literaturverzeichnis

- [1] ACARE: *Advisory Council for Aeronautics Research in Europe*. www.acare4europe.com. abgerufen am 05.05.2017.
- [2] D.Y. ADAMIAN, M.KH. STRELETS UND A.K. TRAVIN: *An efficient method of synthetic turbulence generation at LES inflow in zonal RANS–LES approaches to computation of turbulent flows*. In: *Matem. Mod.*, Vol. 23, No. 7, S. 3–19, 2011.
- [3] M. BERGMANN, C. MORSBACH UND M. FRANKE: *Implicit LES of a turbulent channel flow with high-order discontinuous Galerkin and finite volume discretization*. Institut für Antriebstechnik, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 2017 - Antrag auf Veröffentlichung eingereicht.
- [4] J. BLAZEK: *Computational fluid dynamics: Principles and applications*. Amsterdam, New York, Elsevier, 2001.
- [5] J. BOUSSINESQ: *Théorie de l'écoulement tourbillant*. In: *Mém. Acad. Sci. Paris*, Vol. 23, S. 46–50, 1877.
- [6] L. DAVIDSON: *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling*. Division of Fluid Dynamics, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2016.
- [7] P. DRUAULT, S. LARDEAU, J.P. BONNET, F. COIFFET, J. DELVILLE, E. LAMBALLAIS, J.F. LARGEAU UND L. PERRET: *Generation of Three-Dimensional Turbulent Inlet Conditions for Large-Eddy Simulation*. In: *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 3, S. 447–456, 2004.
- [8] F. DUCROS, F. NICLOUD UND T. POINSOT: *Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries*. In: M. Baines (ed.), *Numerical Methods for Fluid Dynamics VI*, S. 293–299, 1998.

- [9] A. EINSTEIN: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. In: Annalen der Physik, Band 49 (7), S. 769-822, 1916.
- [10] J. FRÖHLICH: *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen: Mit 145 Abbildungen und 14 Tabellen*. Teubner, Wiesbaden, 2006.
- [11] E. GARNIER, N. ADAMS UND P. SAGAUT: *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2009.
- [12] H. HERWIG UND B. SCHMANDT: *Strömungsmechanik: Physik – mathematische Modelle – thermodynamische Aspekte*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, ergänzende 3. Auflage, 2015.
- [13] K. IWAMOTO, Y. SUZUKI UND N. KASAGI: *Database of fully developed channel flow*. http://thtlab.jp/DNS/dns_database.html, THTLAB Internal Report, No ILR-0201, 2002. abgerufen am 19.06.2017.
- [14] N. JARRIN, S. BENHAMADOUCHE, D. LAURENCE UND R. PROSSER: *A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations*. In: J. Heat Fluid Flow, Vol. 27, S. 585–593, 2006.
- [15] J. JEONG UND F. HUSSAIN: *On the identification of a vortex*. In: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 285, S. 69–94, 1995.
- [16] A. KEATING, U. PIOMELLI, E. BALARAS UND H.J. KALTENBACH: *A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation*. In: Physics of Fluids, Vol. 16, Issue 12, 4696, 2004.
- [17] M. KLEIN, A. SADIKI UND J. JANICKA: *A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large-eddy simulations*. In: Journal of Computational Physics, Vol. 186, Issue 2, S. 652–665, 2003.
- [18] R. KRAICHNAN: *Diffusion by a random velocity field*. In: Physics of Fluids, Vol. 13, S. 22-31, 1970.
- [19] A. LEONARD: *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*. In: Advances in Geophysics, Vol. 18, Part A, S. 237–248, Elsevier, 1975.
- [20] J. LORENZ UND V. REICHEL: *Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten*. Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, Lehrstuhl für Numerische Mathematik, RWTH-Aachen, 1994.

- [21] T. LUND, X. WU UND K. SQUIRES: *Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations*. In: J. Comput. Phys., Vol. 140, S. 233–258, 1998.
- [22] P. MOIN UND J. KIM: *Numerical investigation of turbulent channel flow*. In: J. Fluid Mech., Vol. 118, S. 341–377, 1982.
- [23] C. MORSBACH UND M. FRANKE: *Analysis of a synthetic turbulence generation method for periodic configurations*. Institut für Antriebstechnik, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 2017 - Antrag auf Veröffentlichung eingereicht.
- [24] W. MUNTERS, C. MENEVEAU UND J. MEYERS: *Shifted periodic boundary conditions for simulations of wall-bounded turbulent flows*. In: Physics of Fluids, Vol. 28, No. 2, 025112, 2016.
- [25] F. NICOUD UND F. DUCROS: *Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor*. In: Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 62, S. 183–200, 1999.
- [26] M. PAMIÈS, M.E. WEISS, E. GARNIER, S. DECK UND P. SAGAUT: *Generation of synthetic turbulent inflow data for large-eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows*. In: Physics of Fluids, Vol. 21, 045103, 2009.
- [27] R. PANTON: *Incompressible Flow*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [28] S.B. POPE: *Turbulent flows*. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [29] O. REYNOLDS: *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A 186, S. 123, 1895.
- [30] P.L. ROE: *Approximation Riemann solver, parameter vectors, and difference schemes*. In: J. Comput. Phys., Vol. 43, No. 2, S. 357–372, 1981.
- [31] R. ROGALLO UND P. MOIN: *Numerical simulation of turbulent flows*. In: Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 16, S. 99–137, 1984.
- [32] H. SCHLICHTING UND K. GERSTENS: *Grenzschicht-Theorie*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, überarbeitete 10. Auflage, 2006.

- [33] S. SCHMIDT: *Entwicklung einer hybriden LES-URANS-Methode für die Simulation interner und externer turbulenter Strömungen*. Helmut-Schmidt-Universität, Hamburg, 2016.
- [34] S. SCHMIDT UND M. BREUER: *Source Term based Synthetic Turbulence Inflow Generator for Eddy-Resolving Prediction of an Airfoil Flow including a Laminar Separation Bubble*. In: *Computers & Fluids*, Vol. 146, S. 1–22, 2017.
- [35] U. SCHUMANN UND R. FRIEDRICH: *On Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence*. In: Comte-Bellot G., Mathieu J.: *Advances in Turbulence*, S. 88–104, Springer Verlag, Heidelberg, 1987.
- [36] M.L. SHUR, P.R. SPALART, M.K. STRELETS UND A.K. TRAVININ: *Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems*. In: *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 93, No. 1, S. 63–92, 2014.
- [37] J. SMAGORINSKY: *General circulation experiments with the primitive equations*. In: *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 3, S. 99–164, 1963.
- [38] G.R. TABOR UND M.H. BABA-AHMADI: *Inlet conditions for large eddy simulation: A review*. In: *Computer & Fluids*, Vol. 39, Issue 4, S. 553–567, Elsevier, 2009.
- [39] B. VAN LEER: *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method*. In: *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, No. 1, S. 101–136, 1979.
- [40] A.W. VREMAN: *Direct and Large-Eddy Simulation of the Compressible Turbulent Mixing Layer*. University of Twente, Enschede, 1995.
- [41] I. WENDLING: *Dynamische Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien*. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2006.
- [42] R. WENGENMAYR: *Allgegenwärtige Turbulenz*. www.weltderphysik.de/gebiet/fluide/turbulenz. abgerufen am 05.05.2017.
- [43] D.C. WILCOX: *Turbulence modelling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, USA, 1993.
- [44] C. WOLLBLAD UND L. DAVIDSON: *POD Based Reconstruction of Subgrid Stresses for Wall Bounded Flows Using Neural Networks*. In: *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 81, S. 77–96, 2008.

A Numerisches Setup der räumlich zerfallenden Turbulenz

Lösungsmethode

- | | |
|--------------------------------|---------------------|
| • Option | unsteady |
| • time-steps per period | 2304 |
| • sub-iterations per time-step | 1 |
| • max. time-steps | 50.000 bzw. 500.000 |

Räumliche Diskretisierung

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| • Scheme | <i>Third Order Scheme</i> |
| • Accuracy | 2nd order |
| • Blending factor | 0,001 |
| • Entropie fix | 10^{-6} |

Zeitliche Diskretisierung

- | | |
|------------|----------------------|
| • Scheme | Explicit Runge-Kutta |
| • Accuracy | 3rd order |

Turbulenzeinstellungen

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| • Turbulence Treatment | Large Eddy Simulation |
| • Turbulence Model | Smagorinsky |

Wärmeflussmodelleinstellungen

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| • Heat flux Model | <i>Constant Prandtl</i> |
| • Turbulent Prandtl Number | 0,9 |

Gasmodell

- Option Ideal
- Specific ideal gas constant 287,06 J/(kg K)
- Specific heat ratio 1,4

Viskositätsmodell

- Option Sutherland-Law
- Sutherland's constant 110 K
- Temperature reference 273 K
- Molecular viscosity reference $1,7198 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$

Wärmeleitfähigkeitsmodelleinstellungen

- Option *Constant Prandtl*
- Prandtl number 0,72

Eintrittsrandbedingung

- Method Unsteady *Prescribed Velocity Density*
- VelocityX 34,72 m/s
- Density 3,731 kg/m³

Austrittsrandbedingung

- Method unsteady *Unsteady 1D*
- Static Pressure 321.300,8 Pa

Vorgabedaten für STG

- VelocityX 34,72 m/s
- Turbulent Intensity 0,1
- Turbulent Length Scale 0,001 m

B Numerisches Setup der periodischen Kanalrechnung

Lösungsmethode

- Option unsteady
- time-steps per period 1024
- sub-iterations per time-step 1
- max. time-steps 2.319.900

Räumliche Diskretisierung

- Scheme *Third Order Scheme*
- Accuracy 2nd order
- Blending factor 0,001
- Entropie fix 10^{-10}

Zeitliche Diskretisierung

- Scheme Explicit Runge-Kutta
- Accuracy 3rd order

Turbulenzeinstellungen

- Turbulence Treatment Large Eddy Simulation
- Turbulence Model WALE

Wärmeflussmodelleinstellungen

- Heat flux Model *Constant Prandtl*
- Turbulent Prandtl Number 0,9

Gasmodell

- Option Ideal
- Specific ideal gas constant 287,06 J/(kg K)
- Specific heat ratio 1,4

Viskositätsmodell

- Option Sutherland-Law
- Sutherland's constant 110 K
- Temperature reference 273 K
- Molecular viscosity reference $3,21904 \cdot 10^{-5} \text{Pa s}$

Wärmeleitfähigkeitsmodelleinstellungen

- Option *Constant Prandtl*
- Prandtl number 0,72

Randbedingungen an der Wand

- Wall treatment Low-Reynolds
- Heat transfer Adiabatic
- Roughness Smooth

Vorgabedaten für STG

- Velocity Profile RANS-Solution
- Reynolds Stress Profile RANS-Solution
- Turbulent Length Scale Profile RANS-Solution

C Numerisches Setup der endlichen Kanalrechnung

Lösungsmethode

- Option unsteady
- time-steps per period 1024
- sub-iterations per time-step 1
- max. time-steps 2.320.196

Räumliche Diskretisierung

- Scheme *Third Order Scheme*
- Accuracy 2nd order
- Blending factor 0,001
- Entropie fix 10^{-10}

Zeitliche Diskretisierung

- Scheme Explicit Runge-Kutta
- Accuracy 3rd order

Turbulenzeinstellungen

- Turbulence Treatment Large Eddy Simulation
- Turbulence Model WALE

Wärmeflussmodelleinstellungen

- Heat flux Model *Constant Prandtl*
- Turbulent Prandtl Number 0,9

Gasmodell

- Option Ideal
- Specific ideal gas constant 287,06 J/(kg K)
- Specific heat ratio 1,4

Viskositätsmodell

- Option Sutherland-Law
- Sutherland's constant 110 K
- Temperature reference 273 K
- Molecular viscosity reference $3,21904 \cdot 10^{-5} \text{Pa s}$

Wärmeleitfähigkeitsmodelleinstellungen

- Option *Constant Prandtl*
- Prandtl number 0,72

Eintrittsrandbedingung

- Method Unsteady *Prescribed Velocity Density*
- Velocity Profile periodic solution
- Density Profile periodic solution

Austrittsrandbedingung

- Method unsteady *Unsteady 1D Characteristics*
- Static Pressure Profile periodic solution

Randbedingungen an der Wand

- Wall treatment Low-Reynolds
- Heat transfer Adiabatic
- Roughness Smooth

Vorgabedaten für STG

- Velocity Profile periodic solution
- Reynolds Stress Profile periodic solution
- Turbulent Length Scale Profile periodic solution